

DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 13 (tretten)
Eksamensdag: Fredag den 30. marts 2007, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale:
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater)
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort _____

Navn _____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Fredag den 30. marts 2007, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s}{n} \right\} \cdot v \%$$

Opgave 1 (4%)

	Ja	Nej
$5n^3$ er $O(7n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \cdot \log n$ er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\log n)^3$ er $O(n \cdot \log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n\sqrt{n}$ er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
n^2 er $O(n^{3/2} + n \cdot \log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (4%)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O -notationen:

$$\begin{aligned} &7n^2 \\ &n^3/(\log n)^2 \\ &n/\log n \\ &n\sqrt{n} \\ &3^n \end{aligned}$$

Svar: _____

Opgave 3 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $x \leftarrow 0$   
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $x \leftarrow x + 1$   
   $i \leftarrow i * 2$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $j \leftarrow 1$   
  while  $j \leq n$  do  
     $j \leftarrow j + 1$   
   $i \leftarrow i + 1$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $j \leftarrow 1$   
  while  $j \leq n$  do  
     $j \leftarrow j + 1$   
   $i \leftarrow i * 2$ 
```

Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

Opgave 4 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
 $j \leftarrow 1$   
while  $j \leq n$  do  
  for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do  
     $x \leftarrow x + 1$   
   $j \leftarrow j + i$   
   $i \leftarrow i + 1$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
 $j \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $k \leftarrow 1$   
   $l \leftarrow 1$   
  while  $k \leq n$  do  
     $l \leftarrow l + 1$   
     $k \leftarrow k + l$   
   $j \leftarrow j + 1$   
   $i \leftarrow i + j$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $x \leftarrow 1$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
   $y \leftarrow x$   
  for  $j \leftarrow 1$  to  $y$  do  
     $x \leftarrow x + 1$ 
```

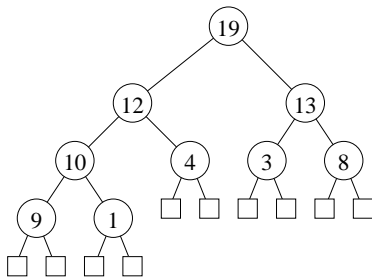
Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

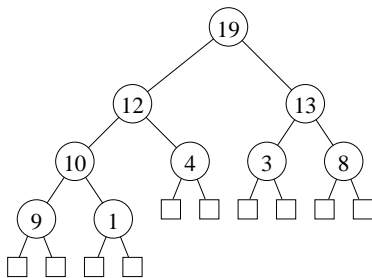
Opgave 5 (4%)

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 16.



Svar: _____

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en heap-extract-max operation.



Svar: _____

Opgave 6 (4%)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: _____

Opgave 7 (4%)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af build-max-heap for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	100

Svar: _____

Opgave 8 (4%)

Betragt et rød-sort søgetræ med n elementer, hvor hver knude er udvidet til at indeholde information om antallet af elementer i dets undertræ. Angiv om følgende operationer kan udføres i $O(\log n)$ tid på sådan et søgetræ.

	Ja	Nej
Find medianen (det $\lceil n/2 \rceil$ 'te mindste element)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Find det k 'te mindste element ($1 \leq k \leq n$)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Find det mindste element	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Find de to elementer $x \neq y$ hvor $ x - y $ er mindst mulig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Find antal elementer der ligger i intervallet $[x, y]$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 9 (4%)

Hvad er udførselstiden for nedenstående sorterings algoritmer på følgende sekvens med n elementer. Det antages at QuickSort altid bruger det sidste element som pivot elementet.

a) $n, n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$

- a) InsertionSort: _____
b) HeapSort: _____
c) MergeSort: _____
d) QuickSort: _____

Opgave 10 (4%)

Betragt radix-sort anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 5, k = 10$). Angiv den delvist sortererede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de fire mindst betydende cifre.

78123 25694 39321 75876 29321 79321

Svar: _____

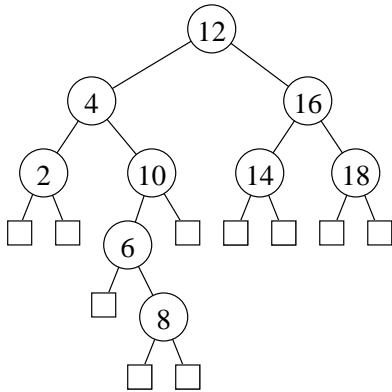
Opgave 11 (4%)

Angiv alle mulige ubalancerede søgetræer for mængden $\{2, 3, 5\}$.

Svar: _____

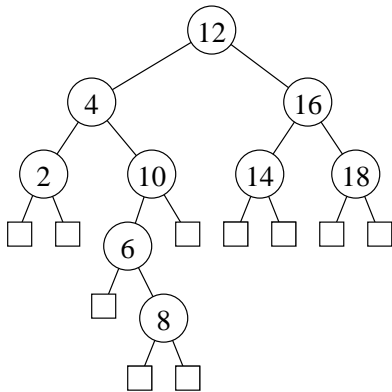
Opgave 12 (4%)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 7.



Svar: _____

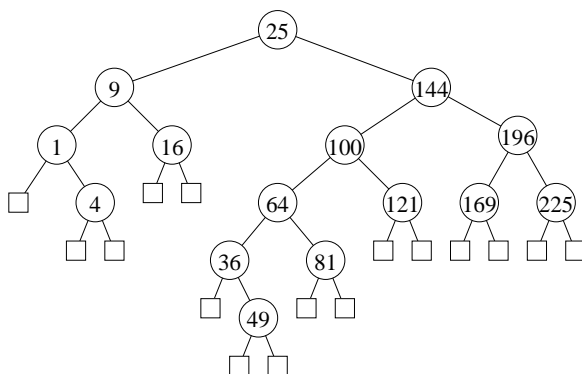
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 4.



Svar: _____

Opgave 13 (4%)

Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.

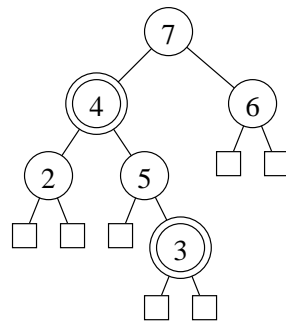


Svar: _____

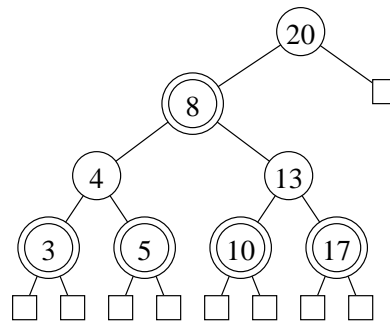
(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 14 (4%)

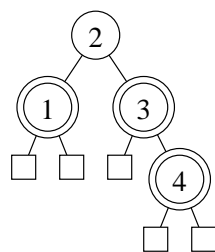
Angiv for hvert af nedenstående træer om det er et lovligt søgetræ, et lovligt rød-sort søgetræ, eller ingen af delene (dobbeltcirkler angiver røde knuder).



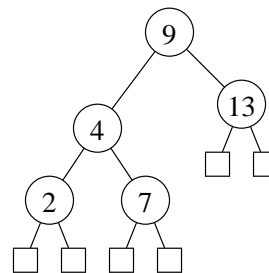
a)



b)



c)

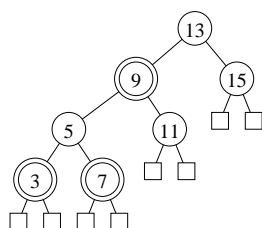


d)

	Rød-sort søgetræ	Søgetræ, men ikke rød-sort	Ikke et søgetræ
a)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 15 (4%)

Tegn hvordan nedenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 8.



Svar: _____

Opgave 16 (4%)

Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hash-funktionen er $h(k) = k * 2 \text{ mod } 5$ og der indsættes elementerne 1, 7, 3, 6, 5, 2, og 8 i den givne rækkefølge.

Svar: _____

Opgave 17 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *linear probing* ser ud efter at elementerne 3, 7, 17, 16, 13, 14, og 4 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k) = k \text{ mod } 11$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Svar: _____

Opgave 18 (4%)

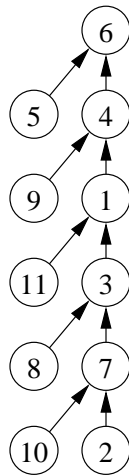
I nedenstående hashtabel er der anvendt *linear probing* med hashfunktionen $h(k) = 3 * k \text{ mod } 13$. Tegn hvordan hashtabellen kan se ud efter at 10 slettes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5	14	10	18	2	15	6				

Svar: _____

Opgave 19 (4%)

Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter $\text{FIND}(3)$, når der anvendes stikomprimering.



Svar: _____

Opgave 20 (4%)

Hvad er den asymptotisk maksimale højde af en union-find datastruktur repræsenteret ved et træ med n elementer, når der anvendes:

- a) hverken union-by-size eller stikomprimering
- b) union-by-size men ikke stikomprimering
- c) stikomprimering men ikke union-by-size
- d) union-by-size og stikomprimering

Svar: _____

Svar: _____

Svar: _____

Svar: _____

Transitionssystem ZigZag
Konfigurationer: $\{[i, j] \mid i, j \geq 0\}$
 $[i, j] \triangleright [i - 1, j + 2] \quad \mathbf{if} \quad i \geq 1$
 $[i, j] \triangleright [i, j - 1] \quad \mathbf{if} \quad j \geq 1$
 $[i, j] \triangleright [i + 1, j - 4] \quad \mathbf{if} \quad j \geq 4$

Opgave 21 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem ZigZag. Startkonfigurationen antages at være $[n, n]$ hvor $n \geq 0$.

	Ja	Nej
$i \leq j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i \geq j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i \leq 5n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$4i + j \leq 5n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 22 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem ZigZag.

	Ja	Nej
$\mu(i, j) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = i + j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = 4i + j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = 3i + j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Algoritme Loop(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : –
Metode : $i \leftarrow 1$;
 $j \leftarrow 1$;
{ I } **while** $i < n$ **do**
 $i \leftarrow i + 1$;
 $j \leftarrow j * i$

Opgave 23 (4%)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$i < n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1 \leq i \leq j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j = i!$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i^2 \leq j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 24 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$\mu(i, j, n) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = i - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = n! - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = n! - i!$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 25 (4%)

Nedenstående algoritme beregner antal indgange i et array A med værdi mindre end eller lig med et tal s . For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_i og I_r være invarianter omkring variablerne i og r . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke). Det antages at A , n og s ikke kan ændres af algoritmen.

Algoritme Count(A, s)
Inputbetingelse : array A med n heltal, heltal s
Outputkrav : $r = |\{j \mid 1 \leq j \leq n \wedge A[j] \leq s\}|$
Metode : $r = 0;$
 $i = 1;$
 $\{I_i \wedge I_r\}$ **while** $i \leq n$ **do**
 if $A[i] \leq s$ **then**
 $r \leftarrow r + 1;$
 $i \leftarrow i + 1;$

Svar I_i : _____

Svar I_r : _____

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ : _____