INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 11 (elleve)
Eksamensdag: Tirsdag den 16. august 2016, kl. 9.00-13.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

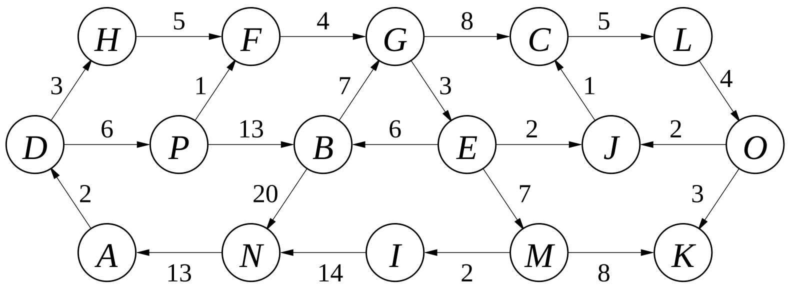
OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes sider til at angive svarene til opgave 1 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående vægtede orienterede graf. Det antages, at grafen er givet ved *incidenslister*, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

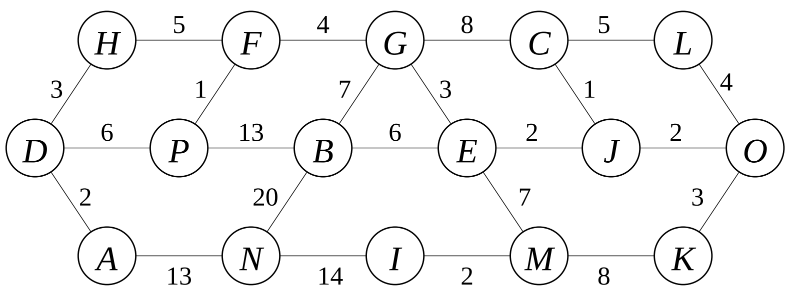


Spørgsmål a: Angiv et BFS-træ for ovenstående graf, hvor BFS-gennemløbet starter i **knuden** A. Angiv kanterne i BFS-træet, BFS-numrene for knuderne, og rækkefølgen knuderne bliver indsat i køen Q i BFS-algoritmen. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS-træ for ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i **knuden** A, og en DFS-nummerering af knuderne. Angiv for hver knude "discovery time" og "finishing time". Marker for hver kant om det er en "tree edge" (T), "back edge" (B), "cross edge" (C) eller "forward edge" (F). □

Spørgsmål c: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. For hver komponent angiv knuderne i komponenten. □

Spørgsmål d: Angiv et korteste veje (SSSP) træ for ovenstående graf, når korteste veje beregningen sker med hensyn til **startknuden** A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v, og angiv rækkefølgen knuderne tages ud af prioritetskøen Q i Dijkstra's algoritme. □

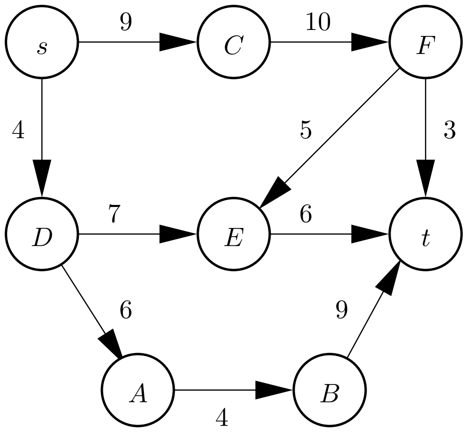


Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ (MST) for ovenstående uorienterede graf med vægte på kanterne. Angiv i hvilken rækkefølge knuderne bliver taget ud af prioritetskøen Q i Prim's algoritme, når denne starter i **knuden** A. □

Opgave 2 (15%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes en side til at angive svarene til opgave 2 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.



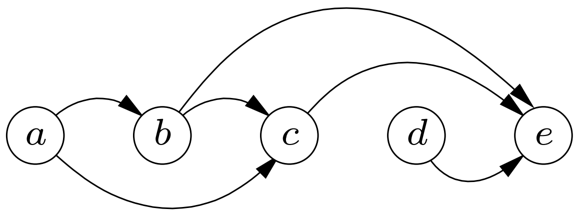
Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning (maximum flow) fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (cut) (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig værdien af en maksimal strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier (augmenting paths) der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen, man forbedrer med, langs stien. □

Opgave 3 (20%)

I denne opgave antages, at vi er givet en orienteret acyklisk graf (DAG) $G = (V, E)$ med $n = |V|$ knuder og $m = |E|$ kanter.

En kant $(u, v) \in E$ siges at være en *genvej* hvis og kun hvis der i grafen G findes en sti $(u, w_1, w_2, \ldots, w_k, v)$, hvor $k \geq 1$ og $(u, w_1) \in E$, $(w_k, v) \in E$ og $(w_i, w_{i+1}) \in E$ for $1 \leq i < k$. I nedenstående DAG er (a, c) en genvej, da der findes stien (a, b, c) fra a til c.



Spørgsmål a: Beskriv en algoritme, der givet en DAG $G = (V, E)$ og en kant $(u, v) \in E$, afgør om (u, v) er en genvej i G. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der givet en DAG $G = (V, E)$, finder delgrafen $G' = (V, E')$ hvor $E' \subseteq E$, således at der ingen genveje er i G', og der er en sti fra u til v i G hvis og kun hvis der er en sti fra u til v i G'. Angiv algoritmens udførselstid. □

I det følgende spørgsmål ønsker vi at finde det mindste antal knude-disjunkte stier, der skal til for at besøge alle knuderne i en DAG. I ovenstående DAG kan man besøge alle knuder med to stier: (a, b, c) og (d, e), eller alternativt med (a, b, c, e) og (d). Bemærk en sti kan bestå af en enkelt knude.

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der givet en DAG $G = (V, E)$, finder det minimale antal knude-disjunkte stier der skal til for at besøge alle knuderne i V. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 4 (20%)

I denne opgave antages, at vi er givet n intervaller $I_1, \ldots, I_n$, hvor $I_i = [x_i, y_i]$, og I_i har en tilknyttet pris $c_i > 0$. For et interval $[a, b]$ ønsker vi at finde den billigste delmængde af intervallerne $I_1, \ldots, I_n$, således at hele intervallet $[a, b]$ er dækket af deres forening. Formelt ønsker vi at finde en mængde $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, således at $[a, b] \subseteq \cup_{j \in J} I_j$ og $c = \sum_{j \in J} c_j$ er mindst mulig. Hvis et interval $[a, b]$ ikke kan dækkes af en delmængde af intervallerne, dvs. $[a, b] \setminus (\cup_{i=1..n} I_i) \neq \emptyset$, så er $c = +\infty$.

Det antages at $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$, og $a < b$ og $x_i < y_i$ for $i = 1..n$.

For intervallerne $I_1 = [2, 3]$, $I_2 = [1, 4]$, $I_3 = [3, 5]$, $I_4 = [3, 6]$ og $I_5 = [5, 6]$, med priserne $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 4$ og $c_5 = 3$, kan $[a, b] = [2, 6]$ dækkes af I_2 og I_4 med samlet pris $c = c_2 + c_4 = 1 + 4 = 5$, hvilket er den mindst mulige pris.

For en givet mængde intervaller $I_1, \ldots, I_n$ og $[a, b]$, lader vi $C(i)$ betegne den mindst mulige pris for at dække $[a, y_i]$ med en delmængde af $I_1, \ldots, I_i$, hvor I_i indgår i løsningen. For $y_i < a$ antages det at $[a, y_i]$ betegner den tomme mængde.

For ovenstående eksempel har vi $C(3) = 3$, da den billigste måde at dække $[a, y_3] = [2, 5]$ med en delmængde af de tre intervaller I_1, I_2 og I_3, er at anvende I_2 og I_3, som har pris $c = c_2 + c_3 = 1 + 2 = 3$. $C(i)$ kan bestemmes ved følgende rekursionsformel, hvor $1 \leq i \leq n$.

$$C(i) = \begin{cases} c_i & \text{hvis } x_i \leq a \\ +\infty & \text{hvis } x_i > a \text{ og } i = 1 \\ +\infty & \text{hvis } x_i > a \text{ og } i > 1 \text{ og } y_{i-1} < x_i \\ c_i + \min\limits_{1 \leq j < i \,:\, y_j \geq x_i} C(j) & \text{hvis } x_i > a \text{ og } i > 1 \text{ og } y_{i-1} \geq x_i \end{cases}$$

Spørgsmål a: Udfyld nedenstående tabel for $C(i)$, for følgende intervaller og priser, og for $[a, b] = [5, 10]$.

i	1	2	3	4	5
I_i	[1,3]	[4,9]	[7,11]	[8,13]	[15,17]
c_i	4	7	5	2	3

i	1	2	3	4	5
$C(i)$					

□

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet n intervaller $I_1, \ldots, I_n$ med priser $c_1, \ldots, c_n$ og et interval $[a, b]$, finder den minimale pris c, der skal til for at dække $[a, b]$. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen til at rapportere en mængde J af intervaller, der minimerer prisen for at dække $[a, b]$. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 5 (20%)

For en streng S lader vi S^R betegne S læst bagfra, f.eks. for $S = abc$ er $S^R = cba$. Vi siger at S forekommer som en *refleksion* i T hvis der findes forekomster af S og S^R i T på positioner ℓ og r, således at $\ell + |S| \leq r$, dvs. forekomsten af S i T er til venstre for forekomsten af S^R i T.

F.eks. forekommer $S = abc$ som en refleksion i $T = aab\underline{abc}bbab\underline{cba}bb$ (forekomsterne af S og S^R er henholdsvis på positionerne 4 og 11).

I det følgende kan det antages at strengene er over et alfabet med $O(1)$ tegn og at et suffikstræ for en streng af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål a: Beskriv en algoritme, der givet to strenge S og T, af længde $m = |S|$ og $n = |T|$, afgør om S forekommer som en refleksion i T. Angiv algoritmens udførselstid. En ideel løsning opnår udførselstid $O(n)$. $\square$

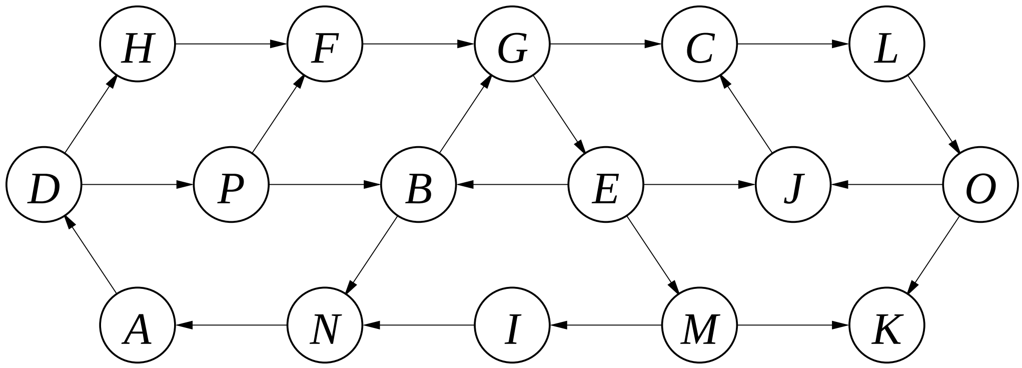
Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der givet en streng T af længde n, finder en længste delstreng S af T, som forekommer som en refleksion i T, eller returnerer at der ingen sådan delstreng findes. Angiv algoritmens udførselstid. En ideel løsning opnår udførselstid $O(n)$. $\square$

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der givet k strenge $T_1, \ldots, T_k$, alle af længde n, finder en længste streng S, som forekommer som en refleksion i alle $T_1, \ldots, T_k$, eller returnerer at der ingen sådan delstreng findes. Angiv algoritmens udførselstid. $\square$

Årskort:	Navn:

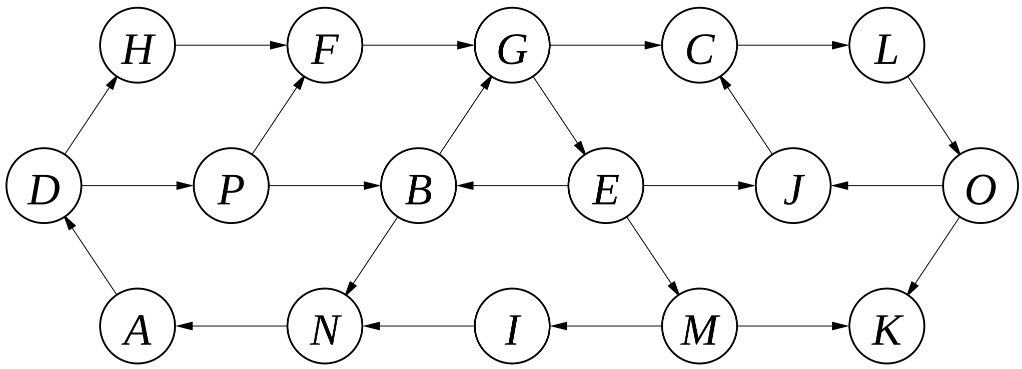
Opgave 1 — Svar

Spørgsmål a: BFS



Indsættelser i Q: ______________________________

Spørgsmål b: DFS



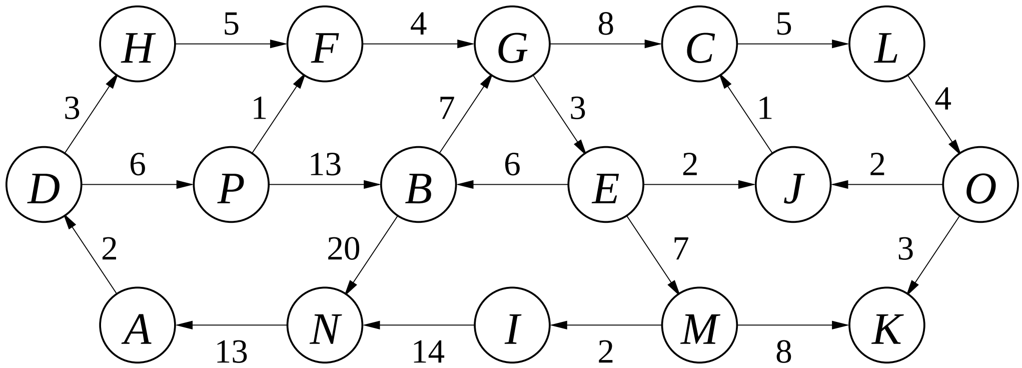
(blank side)

Opgave 1 — Svar

Spørgsmål c:

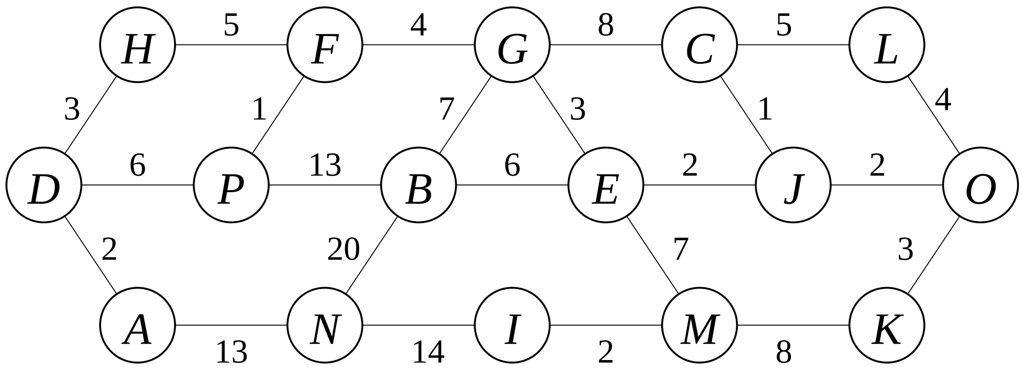
Stærke sammenhængskomponenter: ______________________

Spørgsmål d: SSSP



Udtagelse fra Q: ______________________

Spørgsmål e: MST



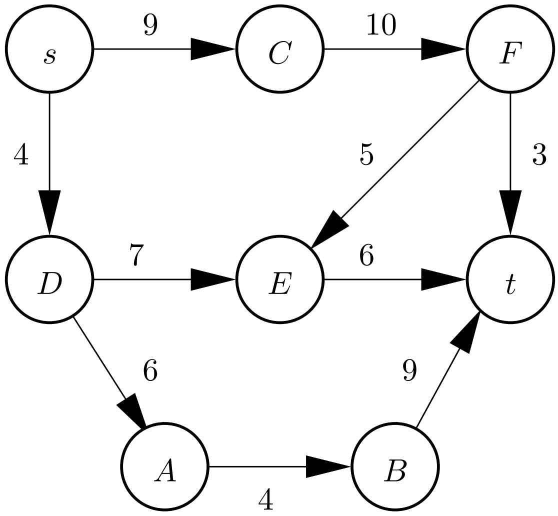
Udtagelse fra Q: ______________________

(blank side)

Årskort:	Navn:

Opgave 2 — Svar

Spørgsmål a:



Værdien af strømning: ____________________

Minimal snit: ____________________

Spørgsmål b:

Forbedring	Forbedrende sti