DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

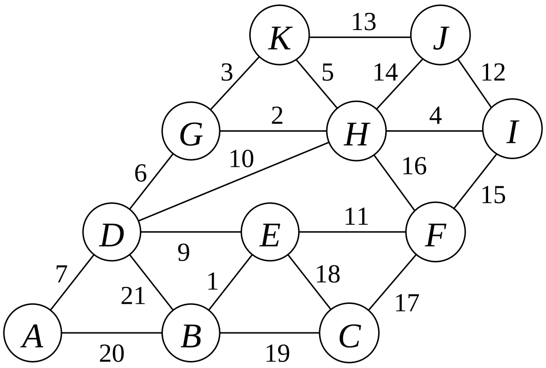
Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 5 (fem)
Eksamensdag: Fredag den 10. august 2007, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Åbogade 34, Benjaminbygning, indgang B
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Spørgsmål a: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ for nedenstående graf og vægten af træet.



□

I det følgende betragter vi grafer hvor alle kanterne har positive vægte og hvor kanterne enten er *normale* eller *stiplede*.

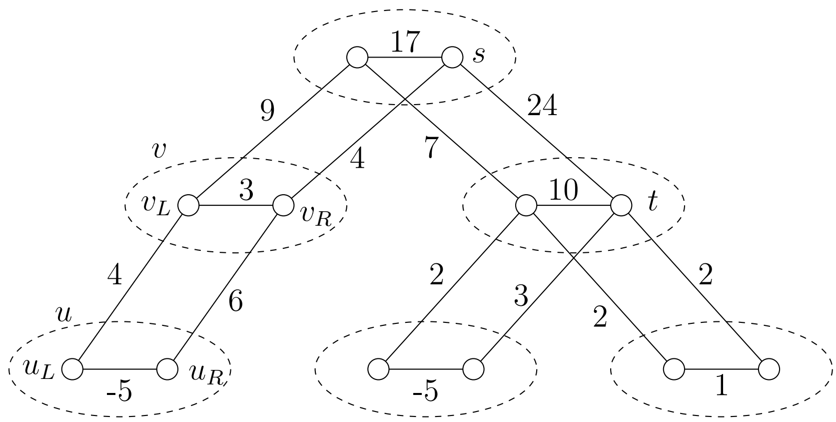
Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der givet en graf med n knuder og m kanter (kanterne kan være normale og stiplede), og to knuder s og t, afgør om der findes en vej fra s til t uden stiplede kanter. Algoritmens udførselstid skal være $O(n+m)$. □

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme der givet en graf med n knuder og m kanter (kanterne kan være normale og stiplede), et positivt heltal k, og to knuder s og t, finder den kortest vej i grafen fra s til t hvor der indgår *højst k stiplede kanter*. Angiv algoritmens udførselstid. (Hint: Lav en orienteret graf med $(k+1)\cdot n$ knuder og kør Dijkstra's algoritme på denne graf). □

Opgave 2 (25%)

I denne opgave betragtes *dobbelt-træ-grafer*. En dobbelt-træ-graf er en uorienteret vægtet graf. Nedenstående viser et eksempel på en dobbelt-træ-graf. En dobbelt-træ-graf består af N *meta-knuder* (de stiplede knuder), hvor en meta-knude v består af to rigtige knuder v_L og v_R som er forbundet med en kant (v_L, v_R). Meta-knuderne er arrangeret i et binært træ (hver meta-knude har højst to børn), således at hvis u er en meta-knude der er et barn til v, så er der i grafen kanterne (v_L, u_L) og (v_R, u_R)

Vi antager at kanterne er vægtede med positive og negative heltal, og at der ingen negative cykler er.

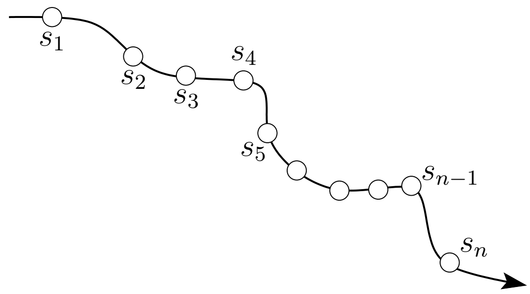


Spørgsmål a: Angiv antal knuder n og kanter m i en dobbelt-træ-graf som funktion af N. Angiv som funktion af N udførselstiden for Bellman-Ford algoritmen for at finde en korteste vej fra s til t i en dobbelt-træ-graf □

Spørgsmål b: Angiv en kortest vej fra knude s til knude t i ovenstående graf – angiv såvel vejens længde og vægten af kanterne langs vejen. □

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme der finder den kortest vej fra s til t i en dobbelt-træ-graf. Algoritmens udførselstid skal være $O(N)$. (Hint: Brug del-og-kombiner). □

Opgave 3 (25%)



I denne opgave betragter vi følgende problem. Vi ønsker at sejle med kano ned af en å (sejlads op ad åen er ikke tilladt). Langs åen er der en række stoppesteder $s_1, \ldots, s_n$. Vi antager at vi ønsker at starte ved s_1 og slutte ved s_n. Ved hvert stoppested s_i kan man efterlade sin nuværende kano og leje en ny kano. At leje en kano mellem s_i og s_j koster $c(i,j)$ hvor $j > i$. Vi ønsker at finde en sekvens af lejemål der bringer os billigst fra s_1 til s_n, dvs. en sekvens $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, hvor $i_1 = 1$ og $i_k = n$, således at $\sum_{j=1}^{k-1} c(i_j, i_{j+1})$ er mindst mulig.

Vi lader $P(i,j)$ betegne det billigste lejemål for at komme fra s_i til s_j.

$P(i,j)$ kan beskrives ved følgende rekursionsformel:

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad i = j \\ \min_{k=i}^{j-1} P(i,k) + c(k,j) & \text{hvis} \quad i < j \end{cases}$$

Spørgsmål a: Udfyld nedstående tabel for $P(i,j)$ når $c(i,j)$ priserne er givet ved nedenstående tabel.

$c(i,j)$:

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	1	6	8	10
2	-	0	4	7	10
3	-	-	0	2	4
4	-	-	-	0	3
5	-	-	-	-	0

$P(i,j)$:

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

□

Spørgsmål b: Angiv en algoritme der finder den billigste pris for at komme fra s_1 til s_n. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til at rapportere en sekvens af lejemål med billigste pris for at komme fra s_1 til s_n. □

Opgave 4 (25%)

Spørgsmål a: Angiv suffix-træet for strengen: B A R B A P A P A . □

En streng $S = TT \cdots T$, der består af præcis k gentagelser af en streng T, betegnes en k-*gentagelse* af T. F.eks. er ABABABAB en 4-gentagelse af strengen AB, og AAA er en 3-gentagelse af strengen A.

I resten af denne opgave ønsker vi at finde k-gentagelser, der er delstrenge i en givet streng. F.eks. forekommer AB og BA begge som 2-gentagelser i nedenstående streng, og BA er faktisk også en 3-gentagelse.

$$S = \mathrm{A\,B\,C\,B\,A\,B\,A\,B\,A\,C}$$

Spørgsmål b: Angiv alle delstrenge af nedenstående streng, som er k-gentagelser for $k \geq 2$.

A B C B A B A C B A B A C B A C B A C B A B B A B

□

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der givet en streng S af længde n og et heltal k, afgør om der i strengen findes en k-gentagelse. Angiv algoritmens udførselstid. □