Algoritmer og Datastrukturer 2

Del-og-kombiner

[CLRS, kapitel 2.3.1-2.3.2, 4.1-4.3, 28.2, problem 30.1.c]

Gerth Stølting Brodal

Aarhus Universitet

Del-og-Kombiner

Algoritme design teknik – virker for mange problemer (man langt fra alle):

- **Opdel** et problem P i mindre problemer $P_1,..,P_k$, der kan løses uafhængigt (små problemer løses direkte)
- Løs delproblemerne $P_1,..,P_k$ **rekursivt**
- **Kombiner** løsningerne for $P_1,..,P_k$ til en løsning for P

Eksempel: Merge-Sort

$\text{Merge-Sort}(A, p, r)$

if $p < r$

  then $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$

  $\text{Merge-Sort}(A, p, q)$

  $\text{Merge-Sort}(A, q + 1, r)$

  $\text{Merge}(A, p, q, r)$

① To mindre delproblemer

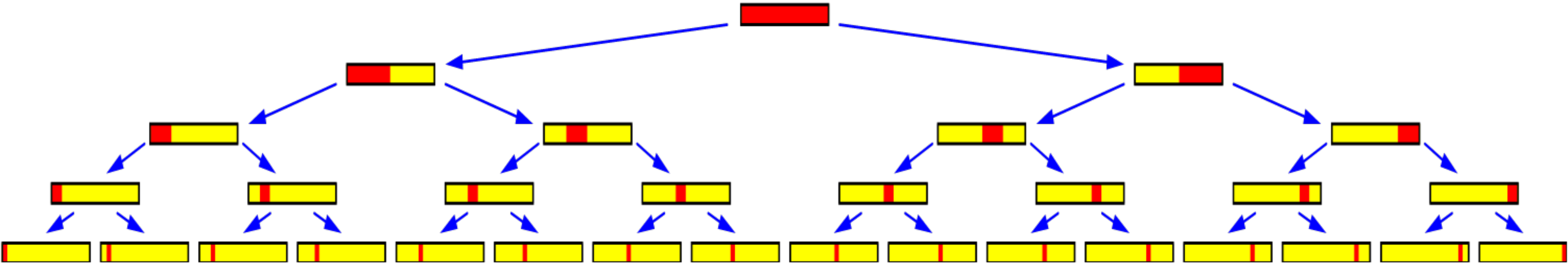
② Løs rekursivt

③ Kombiner

```
MERGE(A, p, q, r)
n1 ← q − p + 1
n2 ← r − q
create arrays L[1 .. n1 + 1] and R[1 .. n2 + 1]
for i ← 1 to n1
      do L[i] ← A[p + i − 1]
for j ← 1 to n2
      do R[j] ← A[q + j]
L[n1 + 1] ← ∞
R[n2 + 1] ← ∞
i ← 1
j ← 1
for k ← p to r
      do if L[i] ≤ R[j]
            then A[k] ← L[i]
                 i ← i + 1
            else A[k] ← R[j]
                 j ← j + 1
```

Merge-Sort : Analyse

Rekursionstræet



Observation

Samlet arbejde per lag er $O(n)$

Arbejde

$$O(n \cdot \#\,\text{lag}) = O(n \cdot \log_2 n)$$

Del-og-kombiner, dADS 1 eksempler:

- **MergeSort**
  - Del op i to lige store dele
  - Rekursiv sortering
  - Kombiner = fletning
- **QuickSort**
  - Opdel efter tilfældigt pivot (**tilfældig opdeling**)
  - Rekursive sortering
  - Kombiner = ingen (konkatener venstre og højre)
- **QuickSelect**
  - Opdel efter tilfældigt pivot (**tilfældig opdeling**)
  - Rekursiv select
  - Kombiner = ingen

Analyse af Del-og-Kombiner

= analyse af en rekursiv procedure

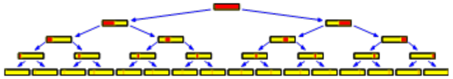
Essentielt to forskellige måder:

1. Argumenter direkte om **rekursionstræet** (analyser dybde, #knuder på hvert niveau, arbejde i knuderne/niveauerne/træet)
2. Løs en matematisk **rekursionsligning**, f.eks.

$$\boxed{\begin{array}{ll} T(n) \leq a & \text{hvis} \quad n \leq c \\ T(n) \leq 2 \cdot T(n/2) + a \cdot n & \text{ellers} \end{array}}$$

Bevises f.eks. vha. induktion.

Løsning af rekursionsligninger



- Fold rekursionsligningen ud og argumenter om **rekursionstræet**
- Gæt en løsning og vis den ved induktion efter voksende n

$$\boxed{\begin{array}{ll} T(n) \leq a & \text{hvis} \quad n \leq c \\ T(n) \leq 2 \cdot T(n/2) + a \cdot n & \text{ellers} \end{array}}$$

Rekursionsligninger: Faldgrubber

- Ulige opdelinger glemmes (n ulige, så er de rekursive kald typisk $\lfloor n/2 \rfloor$ og $\lceil n/2 \rceil$)

- Analyserer typiske kun for $n=2^k$

- Brug aldrig O-udtryk i rekursionsformlen – brug konstanter ($\cancel{T(n)=O(n)+O(T(n/3))}$)

Master Theorem
(Simplificering af [CLRS, Theorem 4.1])

Theorem

Hvis a, b, c, d, p er konstanter som opfylder $a, c, p > 0$, $d \geq 1$, og $b > 1$, så har rekursionsligningen

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis} \quad n \leq d \\ a \cdot T(n/b) + c \cdot n^p & \text{hvis} \quad n > d \end{cases}$$

følgende løsning

$$\begin{array}{lll} O(n^p) & \text{hvis} & a < b^p \\ O(n^p \log n) & \text{hvis} & a = b^p \\ O(n^{\log_b a}) & \text{hvis} & a > b^p \end{array}$$

Matrix Multiplication

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \boxed{c_{21}} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix},$$

$$c_{ij} = \Sigma_{k=1..m}\, a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Naive implementation: tid $\mathrm{O}(npm)$

(Kvadratisk) Matrix Multiplikation

$$\begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I &= AE + BG \\ J &= AF + BH \\ K &= CE + DG \\ L &= CF + DH \end{aligned}$$

- $A,B,\ldots,K,L$ er $n/2$ x $n/2$-matricer
- I,J,K,L kan beregnes med 8 rekursive multiplication på $n/2$ x $n/2$-matricer + 4 matrix additioner
- $T(n) \leq 8 \cdot T(n/2) + c \cdot n^2$ for $n \geq 2$

  $T(n) \leq c$ for $n = 1$
- $T(n) = O(n^3)$

Strassen's Matrix Multiplikation

1969

$$\begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
I &= S_5 + S_6 + S_4 - S_2 \\
&= (A+D)(E+H) + (B-D)(G+H) + D(G-E) - (A+B)H \\
&= AE + DE + AH + DH + BG - DG + BH - DH + DG - DE - AH - BH \\
&= AE + BG.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &= S_1 + S_2 \\
&= A(F-H) + (A+B)H \\
&= AF - AH + AH + BH \\
&= AF + BH.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= S_3 + S_4 \\
&= (C+D)E + D(G-E) \\
&= CE + DE + DG - DE \\
&= CE + DG.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= S_1 - S_7 - S_3 + S_5 \\
&= A(F-H) - (A-C)(E+F) - (C+D)E + (A+D)(E+H) \\
&= AF - AH - AE + CE - AF + CF - CE - DE + AE + DE + AH + DH \\
&= CF + DH.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
S_1 &= A(F-H) \\
S_2 &= (A+B)H \\
S_3 &= (C+D)E \\
S_4 &= D(G-E) \\
S_5 &= (A+D)(E+H) \\
S_6 &= (B-D)(G+H) \\
S_7 &= (A-C)(E+F)
\end{aligned}}$$

Strassen's Matrix Multiplikation

- Bruger 18 matrix additioner (tid $O(n^2)$) og 7 rekursive matrix multiplikationer

$$\boxed{\begin{array}{ll} T(n) \leq 7 \cdot T(n/2) + c \cdot n^2 & \text{for } n \geq 2 \\ T(n) \leq c & \text{for } n = 1 \end{array}}$$

- $T(n) = O(n^{2.81})$ hvor $2.81 = \log_2 7$

Multiplikation af lange heltal

- I og J hver heltal med n bits
- Naive implementation kræver $O(n^2)$ bit operationer
- Lad $I = I_h \cdot 2^{n/2} + I_l$ og $J = J_h \cdot 2^{n/2} + J_l$
- $I \cdot J = I_h \cdot J_h \cdot 2^n + ((I_h - I_l) \cdot (J_l - J_h) + I_l \cdot J_l + I_h \cdot J_h) \cdot 2^{n/2} + I_l \cdot J_l$

$$\boxed{\begin{array}{ll} T(n) \le 3 \cdot T(n/2) + c \cdot n & \text{for } n \ge 2 \\ T(n) \le c & \text{for } n = 1 \end{array}}$$

- $T(n) = O(n^{\log_2 3})$