

Opgave 21 – Gitter-graffer

En *gitter-graf* er en orienteret graf hvor knuderne er arrangeret i k rækker hver indeholdende k knuder, hvor k er et positivt heltal. Lad $v_{i,j}$ betegne den j te knude i den i te række. Lad $s = v_{1,1}$. En gitter-graf har følgende knuder og kanter:

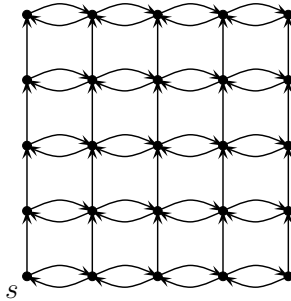
$$V = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k \wedge 1 \leq j \leq k\}$$

$$E = \{(v_{i,j}, v_{i,j+1}) \mid 1 \leq i \leq k \wedge 1 \leq j < k\} \cup$$

$$\{(v_{i,j}, v_{i,j-1}) \mid 1 \leq i \leq k \wedge 1 < j \leq k\} \cup$$

$$\{(v_{i,j}, v_{i+1,j}) \mid 1 \leq i < k \wedge 1 \leq j \leq k\}$$

Nedenstående figur viser gitter-grafen for $k = 5$.



I resten af denne opgave antager vi at alle kanter har en ikke-negativ vægt.

- Lad n og m betegne henholdsvis antallet af knuder og kanter i en gitter-graf. Udtryk n og m som funktion af k .
- Hvad er udførelstiden for Dijkstra's algoritme for at finde længden af de korteste veje fra $s = v_{1,1}$ til alle de øvrige knuder i en gitter-graf som funktion af k ?
- Beskriv en algoritme der finder længden af de korteste veje fra $s = v_{1,1}$ til alle de øvrige knuder i en gitter-graf i tid $O(m)$. Argumenter for algoritmens udførelstid og korrekthed.

En *cylinder-graf* er en gitter-graf udvidet med ikke-negative vægtede kanter mellem den venstre og højre knude i hver række, d.v.s. E indeholder også kanterne $(v_{i,1}, v_{i,k})$ og $(v_{i,k}, v_{i,1})$ for $1 \leq i \leq k$.

- Beskriv en algoritme der finder længden af de korteste veje fra $s = v_{1,1}$ til alle de øvrige knuder i en cylinder-graf i tid $O(m)$. Argumenter for algoritmens udførelstid og korrekthed.