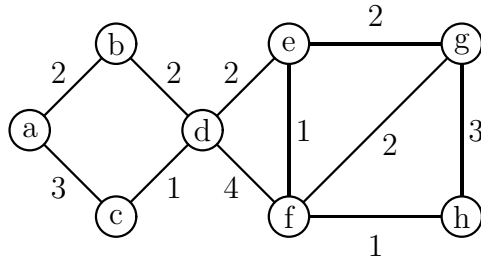


Opgave 19 – BFS, DFS, SSSP, MST

Betragt følgende graf



- Find et dybde-først udspændende træ, der starter ved a og ved d.
- Find et bredde-først udspændende træ, der starter ved a og ved d.
- Find korteste veje fra a ved hjælp af Dijkstras algoritme.
- Find et letteste udspændende træ ved hjælp af Kruskals og Prims algoritmer.

Opgave 20 – MST $\supseteq \{e_1, \dots, e_k\}$

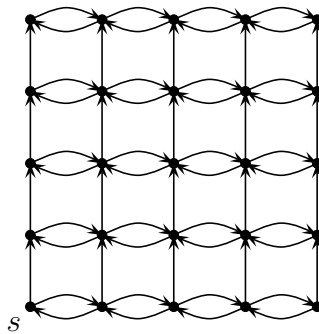
Betragt følgende modifikation af letteste udspændende træ problemet: Der er givet en vægtet, sammenhængende ikke-orienteret graf $G = (V, E)$ samt et antal kanter $e_1, \dots, e_k \in E$. Skriv en algoritme, der finder ud af, om der eksisterer et udspændende træ for G , der indeholder e_1, \dots, e_k ; og som i givet fald finder det letteste sådanne træ.

Opgave 21 – Gitter-graffer

En *gitter-graf* er en orienteret graf hvor knuderne er arrangeret i k rækker hver indeholdende k knuder, hvor k er et positivt heltal. Lad $v_{i,j}$ betegne den j te knude i den i te række. Lad $s = v_{1,1}$. En gitter-graf har følgende knuder og kanter:

$$\begin{aligned} V &= \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k \wedge 1 \leq j \leq k\} \\ E &= \{(v_{i,j}, v_{i,j+1}) \mid 1 \leq i \leq k \wedge 1 \leq j < k\} \cup \\ &\quad \{(v_{i,j}, v_{i,j-1}) \mid 1 \leq i \leq k \wedge 1 < j \leq k\} \cup \\ &\quad \{(v_{i,j}, v_{i+1,j}) \mid 1 \leq i < k \wedge 1 \leq j \leq k\} \end{aligned}$$

Nedenstående figur viser gitter-grafen for $k = 5$.



I resten af denne opgave antager vi at alle kanter har en ikke-negativ vægt.

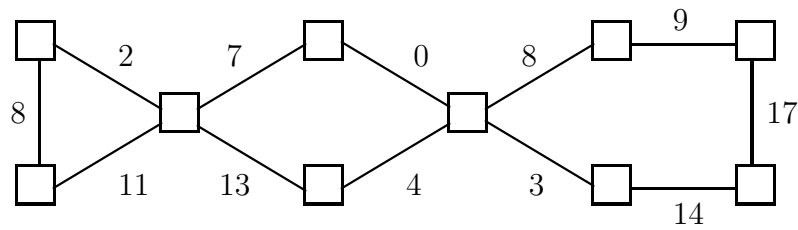
- Lad n og m betegne henholdsvis antallet af knuder og kanter i en gitter-graf. Udtryk n og m som funktion af k .
- Hvad er udførelstiden for Dijkstra's algoritme for at finde længden af de korteste veje fra $s = v_{1,1}$ til alle de øvrige knuder i en gitter-graf som funktion af k ?
- Beskriv en algoritme der finder længden af de korteste veje fra $s = v_{1,1}$ til alle de øvrige knuder i en gitter-graf i tid $O(m)$. Argumenter for algoritmens udførelstid og korrekthed.

En *cylinder-graf* er en gitter-graf udvidet med ikke-negative vægtede kanter mellem den venstre og højre knude i hver række, d.v.s. E indeholder også kanterne $(v_{i,1}, v_{i,k})$ og $(v_{i,k}, v_{i,1})$ for $1 \leq i \leq k$.

- Beskriv en algoritme der finder længden af de korteste veje fra $s = v_{1,1}$ til alle de øvrige knuder i en cylinder-graf i tid $O(m)$. Argumenter for algoritmens udførelstid og korrekthed.

Opgave 22 – Cykelkæde

En *cykelkæde* er en vægtet graf, der består af en kæde af simple cykler, kaldet *led*. To naboled har altid en enkelt knude til fælles, kaldet en *stift*. I en cykelkæde har stifterne således grad 4, medens de øvrige knuder har grad 2. Det følgende er et eksempel på en cykelkæde med tre led og to stifter.



Antag, at en cykelkæde har k led, n knuder og m kanter.

- Angiv m udtrykt ved k og n .
- Beskriv hvordan man kan finde det letteste udspændende træ for en cykelkæde i tid $O(n)$.