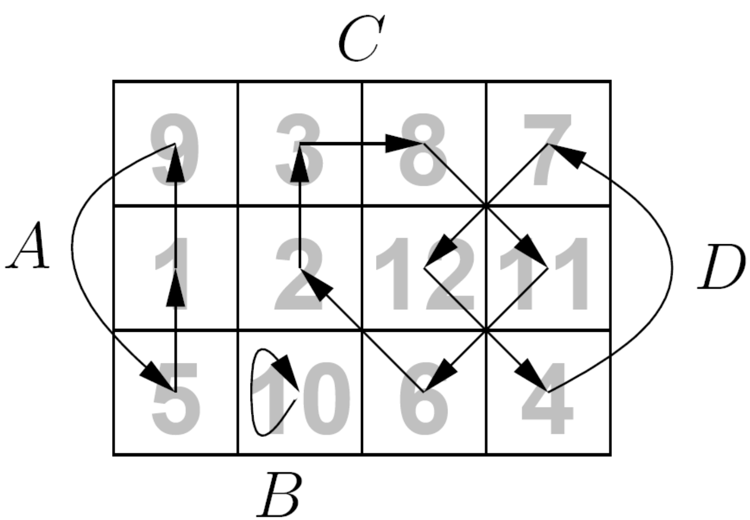
Algoritmer og Datastrukturer 1

Gerth Stølting Brodal

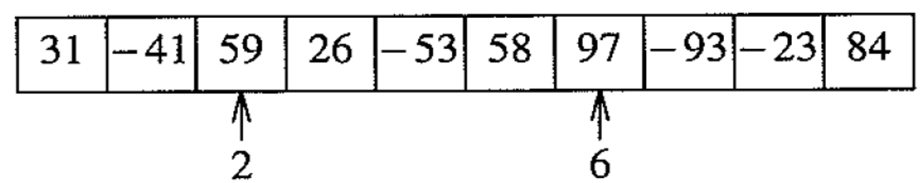
Analyseværktøjer [CLRS, 1-3.1]

AARHUS UNIVERSITET

Eksempler på en beregningsprocess…



Puslespil ved ombytninger



Maximum delsum

Hvad er udførselstiden for en algoritme?

Fra Idé til Programudførelse

Idé

Del og Kombiner ?

Pseudokode

...
for each x **in** *m* **up to** middle
    add *x* to left
for each *x* **in** *m* **after** middle
    add *x* to right
...

(Java-)kode

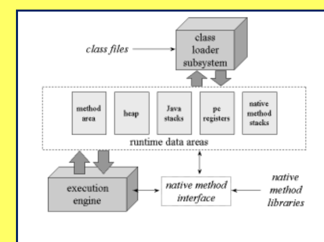
```
...
if ( t1[t1index] <= t2[t2index] )
    a[index] = t1[t1index++];
else
    a[index] = t2[t2index++];
...
```

Compiler

Maskinkode

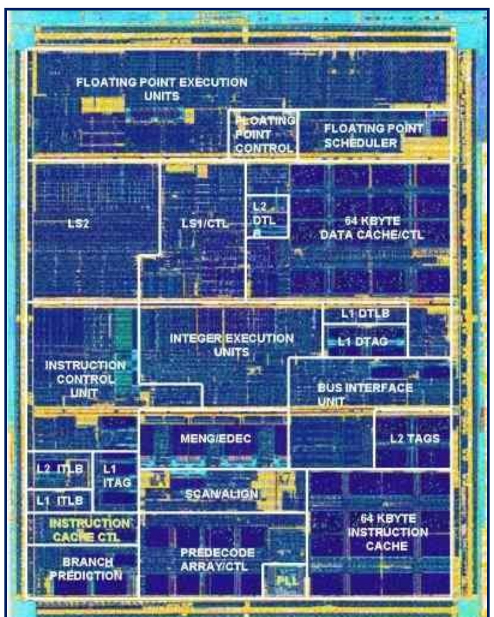
Assembler

(Java) Bytekode



+ Virtuel maskine

Program-
udførsel



Mikrokode

Virtuel hukkomelse/ TLB

L1, L2,… cache

Branch Prediction

Pipelining

...

Maskiner har forskellig hastighed...

Maskine	Tid (sek)
camel19	8.9
molotov	10.2
harald	26.2
gorm	7.8

Tid for at sortere linierne i en 65 MB web log på forskellige maskiner på Institut for Datalogi

Idé:

Argumenter om algoritmer uafhængig af maskine

Design af Algoritmer

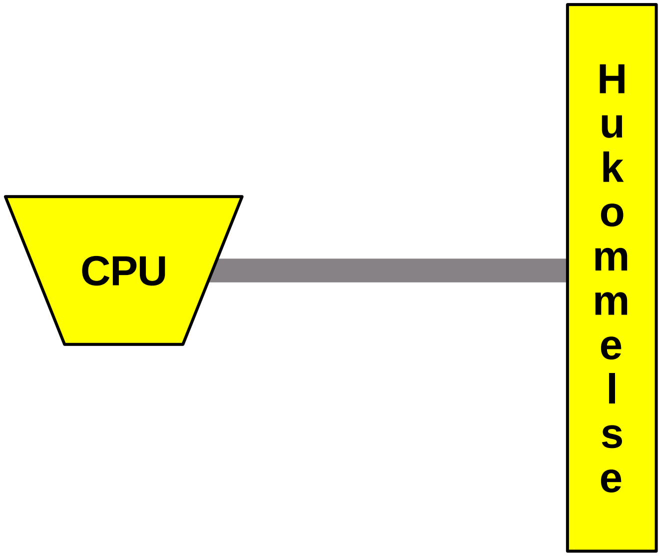
Korrekt algoritme

- algoritmen **standser** på alle input
- output er det **rigtige** på alle input

Effektivitet

- Optimer algoritmerne mod at bruge **minimal** tid, plads, additioner,... eller **maximal** parallellisme...
- ~ n^2 er bedre end ~ n^3 : **assymptotisk tid**
- Mindre vigtigt : **konstanterne**
- Resouceforbrug: **Worst-case** eller **gennemsnitlig**?

RAM Modellen
(Random Access Machine)



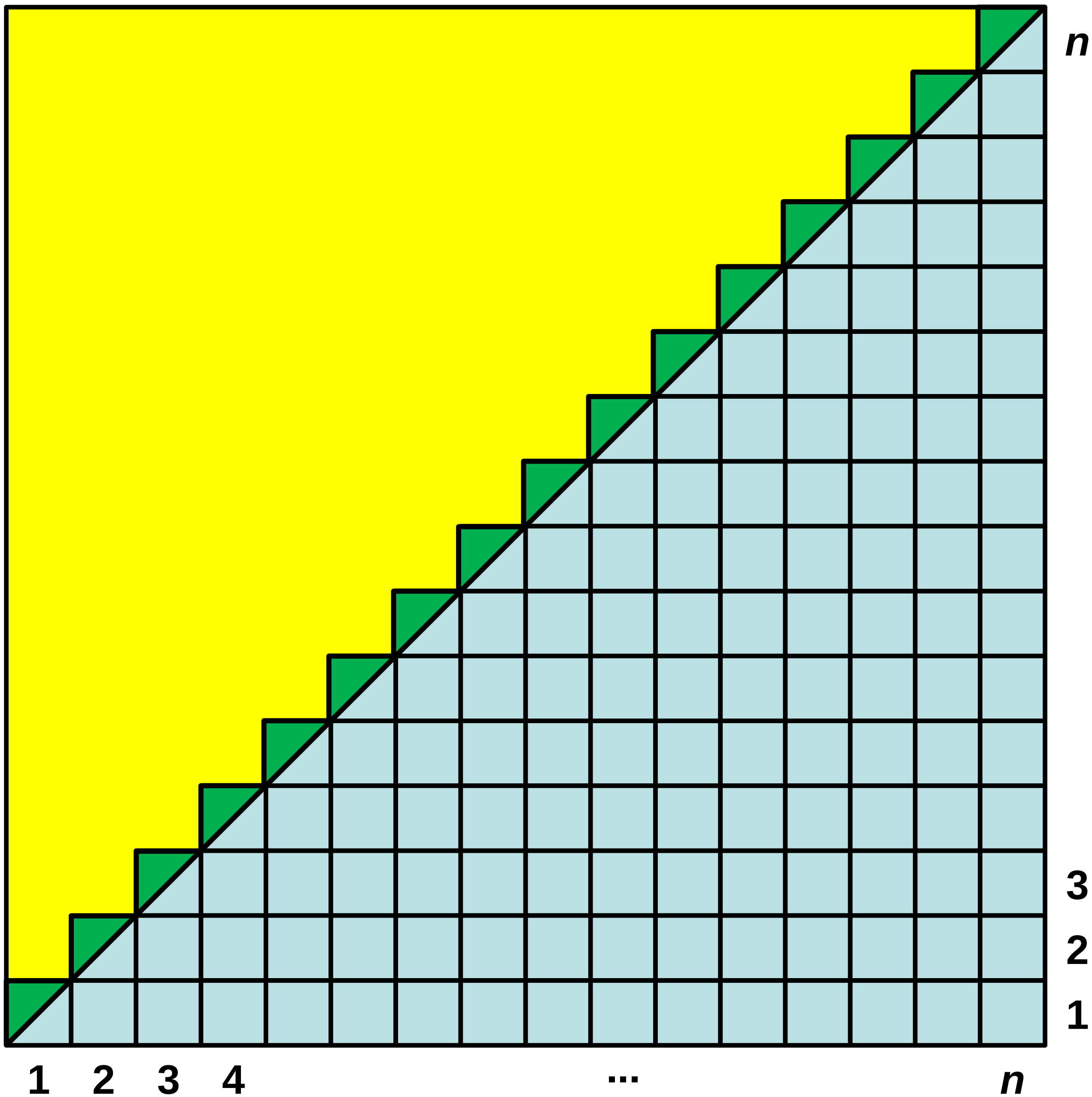
- Beregninger sker i CPU
- Data gemmes i hukommelsen
- Basale operationer tager **1 tidsenhed**:

  +, -, *, AND, OR, XOR, **get(i)**, **set(i,v)**, ...
- Et maskinord indeholder $c \cdot \log n$ **bits**

Eksempel: Insertion-Sort

```
INSERTION-SORT(A)
for j = 2 to A.length
    key = A[j]
    // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] = A[i]
        i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

$$1 + 2 + \cdots + n$$
$$= n^2/2 + n/2$$
$$= n(n + 1)/2$$



Insertion-Sort (C)

```
insertion(int a[], int N)
 { int i, j, key;

   for(j=1; j < N; j++)
    { key = a[j];
      i = j-1;
      while( i>=0 && a[i] > key )
       { a[i+1] = a[i];
         i--;
       }
      a[i+1] = key;
    }
 }
```

```
insertion:
        pushl   %ebp
        movl    %esp, %ebp
        pushl   %edi
        pushl   %esi
        pushl   %ebx
        subl    $12, %esp
        cmpl    $1, 12(%ebp)
        jle     .L3
        movl    8(%ebp), %edx
        xorl    %ebx, %ebx
        movl    8(%ebp), %eax
        movl    $1, -16(%ebp)
        movl    4(%edx), %edx
        addl    $4, %eax
        movl    %eax, -20(%ebp)
        movl    %edx, -24(%ebp)
        .p2align 4,,7
.L6:
        movl    8(%ebp), %ecx
        leal    0(,%ebx,4), %esi
        movl    (%ecx,%ebx,4), %eax
        cmpl    -24(%ebp), %eax
        jle     .L8
        movl    %ecx, %edi
        leal    -4(%esi), %ecx
        leal    (%ecx,%edi), %edx
        jmp     .L9
        .p2align 4,,7
.L16:
        movl    (%edx), %eax
        movl    %ecx, %esi
        subl    $4, %edx
        subl    $4, %ecx
        cmpl    -24(%ebp), %eax
        jle     .L8
.L9:
        movl    -20(%ebp), %edi
        subl    $1, %ebx
        movl    %eax, (%edi,%esi)
        jns     .L16
.L8:
        movl    -16(%ebp), %edi
        movl    8(%ebp), %edx
        leal    (%edx,%edi,4), %eax
.L5:
        movl    -24(%ebp), %ecx
        movl    -20(%ebp), %edx
        addl    $1, -16(%ebp)
        movl    -16(%ebp), %edi
        movl    %ecx, (%edx,%ebx,4)
        cmpl    %edi, 12(%ebp)
        jle     .L3
        movl    4(%eax), %edx
        movl    %edi, %ebx
        addl    $4, %eax
        subl    $1, %ebx
        movl    %edx, -24(%ebp)
        jns     .L6
        jmp     .L5
.L3:
        addl    $12, %esp
        popl    %ebx
        popl    %esi
        popl    %edi
        popl    %ebp
        ret
```

Eksempel: Insertion-Sort

- Eksempel på **pseudo-kode**
- Detaljeret analyse – stort arbejde
- Tid: **worst-case** (~ n^2) og **best-case** (~ n) meget forskellige
- Tid: **gennemsnitlige** (~ n^2)
- Hurtigere på ~ sorterede input: **adaptive**

Asymptotisk notation

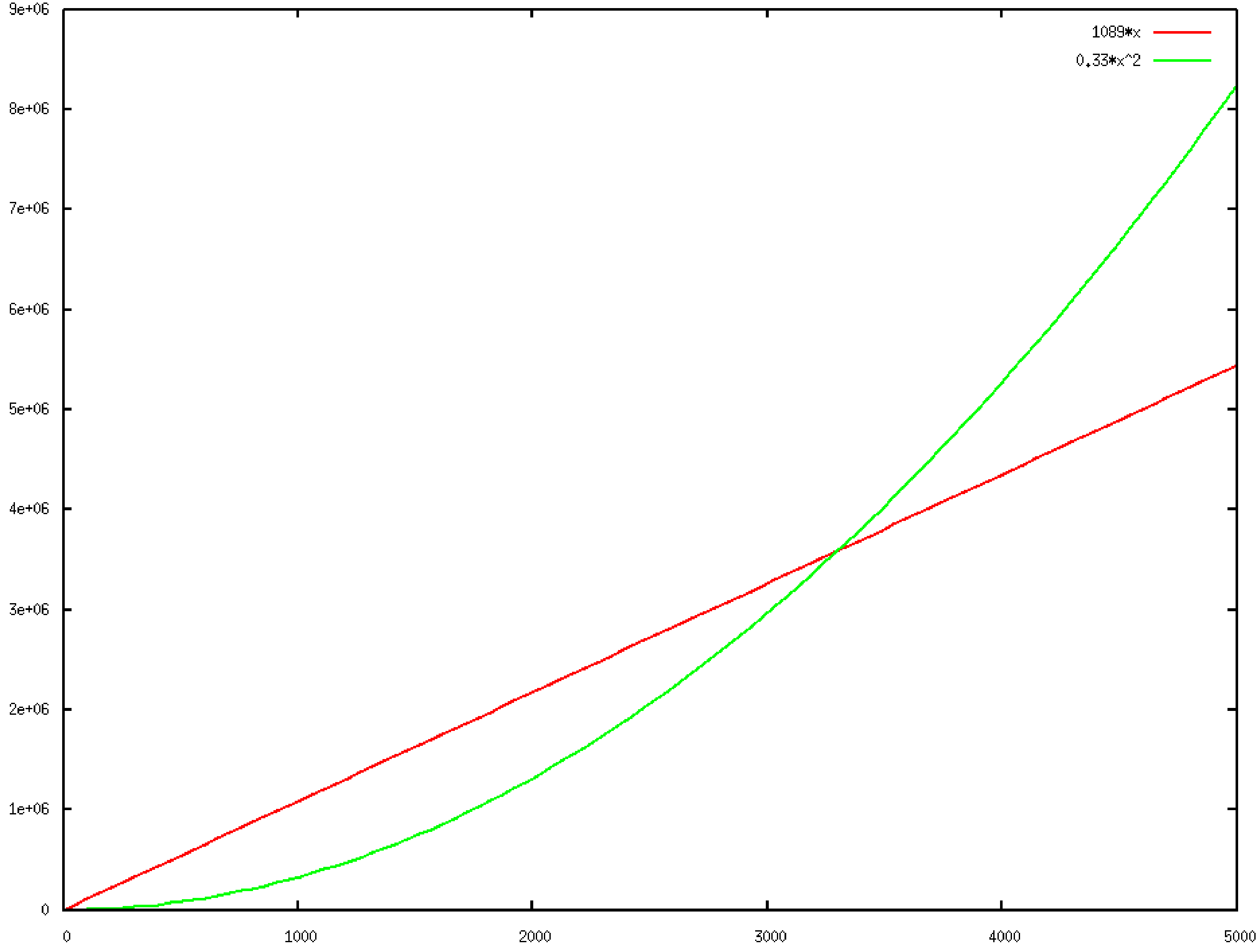
- Grundlæggende antagelse:
  - $\sim n^2$ er bedre end $\sim n^3$
  - Konstanter ikke vigtige
- **Matematisk formel** måde at arbejde med ”~”
- Eksempler:

$$87 \cdot n^2 \quad \text{"}\leq\text{"} \quad 12 \cdot n^3$$

$$1089 \cdot n \quad \text{"}\leq\text{"} \quad 0.33 \cdot n^2$$

$$7 \cdot n^2 + 25 \cdot n \quad \text{"}\leq\text{"} \quad n^2$$

$1089 \cdot x$ vs $0.33 \cdot x^2$



O - notation

... og vennerne

Ω (store omega)
θ (theta)
ω (lille omega)
o (lille o)

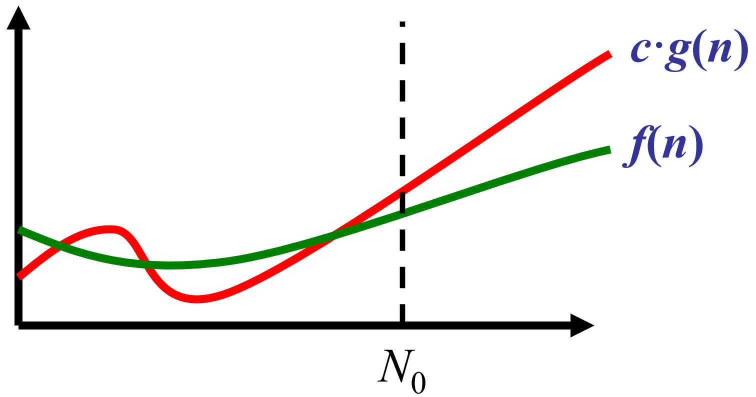
O-notation

Definition: $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$



Intuitivt: $f(n)$ er "mindre end er lig med" $g(n)$, eller $g(n)$ "dominerer" $f(n)$

Eksempel: Insertion-Sort

```
INSERTION-SORT(A)
for j = 2 to A.length
    key = A[j]
    // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j - 1].
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] = A[i]
        i = i - 1
    A[i + 1] = key
```

Tid $O(n^2)$

Eksempler : O - regneregler

$$f(n) = \mathrm{O}(g(n)) \Rightarrow c \cdot f(n) = \mathrm{O}(g(n))$$

$$f_1(n) = \mathrm{O}(g_1(n)) \quad \text{og} \quad f_2(n) = \mathrm{O}(g_2(n)) \Rightarrow$$
$$f_1(n) + f_2(n) = \mathrm{O}(\ \max(g_1(n), g_2(n))\ )$$
$$f_1(n) \cdot f_2(n) = \mathrm{O}(\ g_1(n) \cdot g_2(n)\ )$$

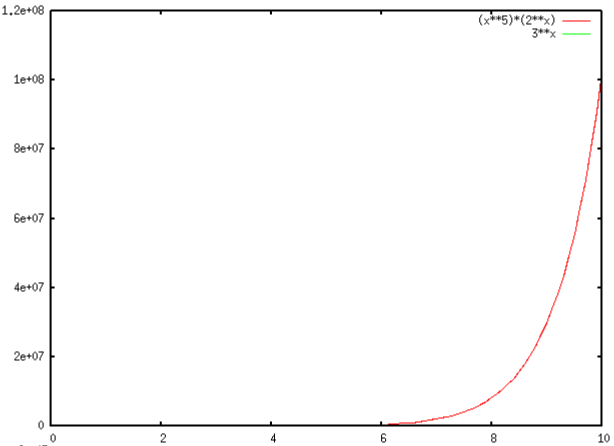
$$c_k \cdot n^k + c_{k\text{-}1} \cdot n^{k\text{-}1} + \cdot\ \cdot\ \cdot + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0 = \mathrm{O}(n^k)$$

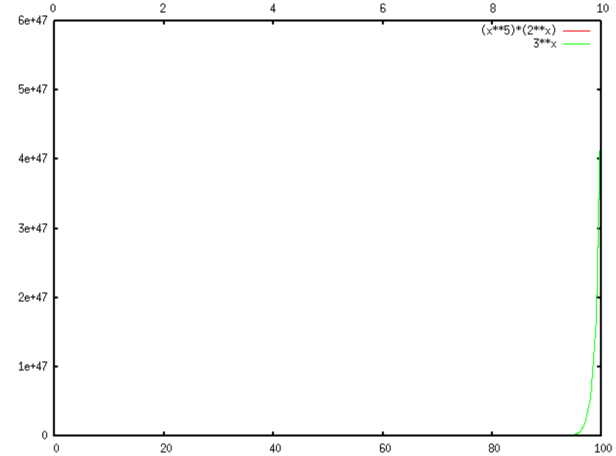
Eksempler : O

- $3 \cdot n^2 + 7 \cdot n = \mathrm{O}(n^2)$
- $n^2 = \mathrm{O}(n^3)$
- $\log_2 n = \mathrm{O}(n^{0.5})$
- $(\log_2 n)^3 = \mathrm{O}(n^{0.1})$
- $n^2 \cdot \log_2 n + 7 \cdot n^{2.5} = \mathrm{O}(n^{2.5})$
- $2^n = \mathrm{O}(3^n)$
- $n^5 \cdot 2^n = \mathrm{O}(3^n)$

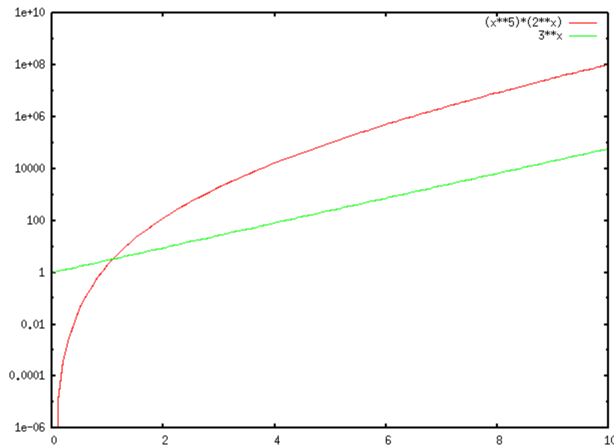
Visuel test af $n^5 \cdot 2^n = O(3^n)$?

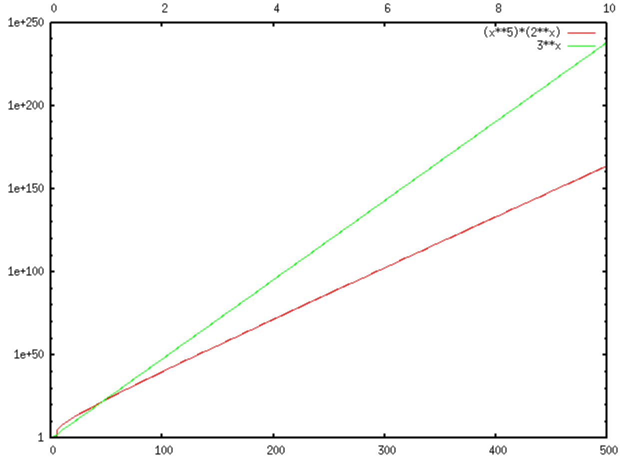
Plot af de to funktioner
– ikke særlig informativ



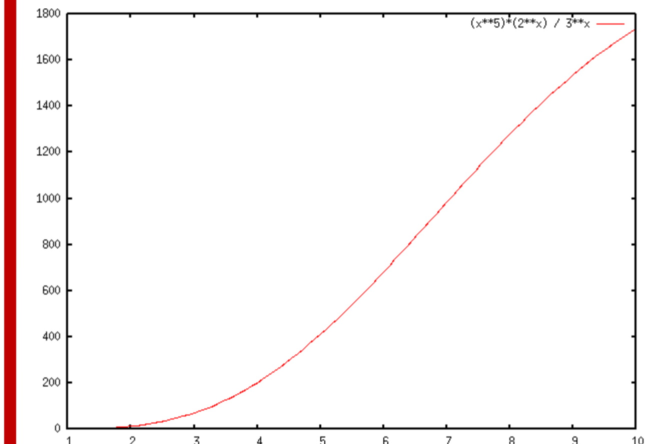


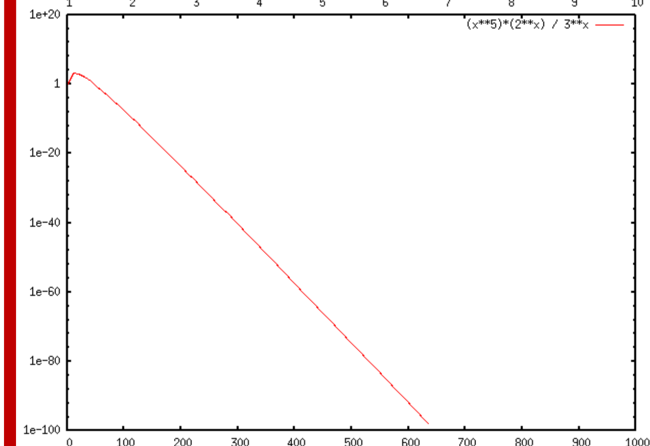
Plot af de to funktioner
med logaritmisk y-akse
– første plot misvisende





Plot af brøken mellem
de to funktioner
– første plot misvisende





Plots lavet med Gnuplot

Bevis for $n^5 \cdot 2^n = O(3^n)$

Vis $n^5 \cdot 2^n \leq c \cdot 3^n$ for $n \geq N_0$ for passende valg af c og N_0

Bevis:

$(5/\log_2(3/2))^2 \leq n$ for $n \geq 73$

$\Downarrow$ $5/\log_2(3/2) \leq \sqrt{n} = n/\sqrt{n} \leq n/\log_2 n$ da $\sqrt{n} \geq \log_2 n$ for $n \geq 17$

$\Downarrow$ $5 \cdot \log_2 n \leq n \cdot \log_2(3/2)$

$\Downarrow$ $\log_2(n^5) \leq \log_2(3/2)^n$

$\Downarrow$ $n^5 \leq (3/2)^n = 3^n / 2^n$

$\Downarrow$ $n^5 \cdot 2^n \leq 3^n$

Dvs. det ønskede gælder for $c = 1$ og $N_0 = 73$. □

Sætning $\text{poly}(n) \cdot a^n = O(b^n)$ for alle $1 \leq a < b$

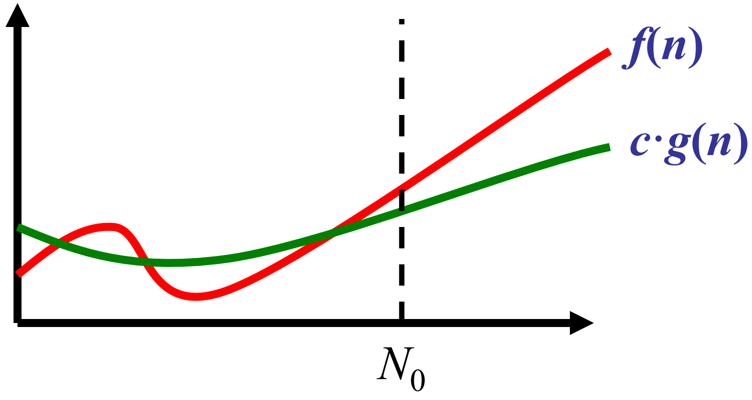
Ω -notation

Definition: $f(n) = \Omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

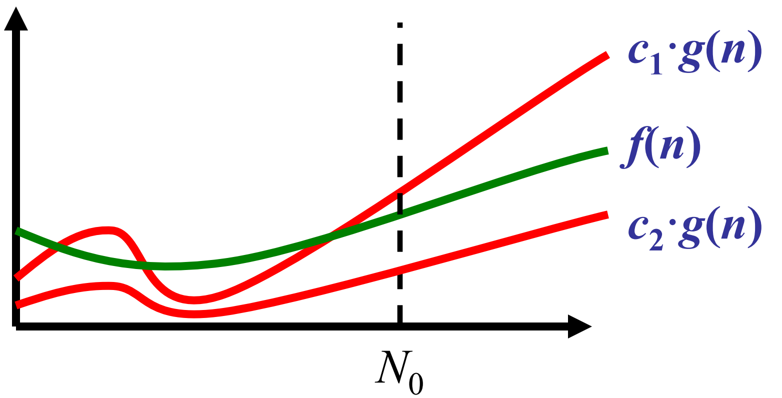


Intuitivt: $f(n)$ er ”større end er lig med” $g(n)$, eller $g(n)$ er ”domineret af” $f(n)$

Θ-notation

Definition: $f(n) = \Theta(g(n))$

hvis $f(n) = O(g(n))$ og $f(n) = \Omega(g(n))$



Intuitivt: $f(n)$ og $g(n)$ er ”assymptotisk ens”

o-notation (lille o)

Definition: $f(n) = o(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \to R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Intuitivt: $f(n)$ er ”skarpt mindre end” $g(n)$

ω-notation

Definition: $f(n) = \omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Intuitivt: $f(n)$ er ”skarpt større end” $g(n)$

Algoritme Analyse

- RAM model
- O-notation

... behøver ikke at beskrive og analysere algoritmer i detaljer !