

INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12 (tolv)
Eksamensdag: Fredag den 10. august 2012, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale: Finlandsgade 8, bygning 5106-5108, 8200 Aarhus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.

Årskort _____

Navn _____

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s}{n} \right\} \cdot v \%$$

Opgave 1 (4%)

	Ja	Nej
n er $O(n^{1/2})$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3n^7 + n^5$ er $O(n^6)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\log n)^2$ er $O(2^{\log n})$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
n^1 er $O(1)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1/n$ er $O(\log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (4%)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O -notationen:

$2^{3 \log n}$
 $n^{3/2}$
 \sqrt{n}
 $n \cdot \log n$
 $(3/2)^n$

Svar: _____

Opgave 3 (4%)

Antag vi ønsker at understøtte operationen $\text{PRED}(x)$ på nedenstående fire datastrukturer, som returnerer det største element i datastrukturen mindre end x . F.eks. for mængden $\{1, 2, 4, 7, 8\}$ er $\text{PRED}(5) = 4$. Angiv for hver af datastrukturerne hvor lang tid det vil tage at udføre $\text{PRED}(x)$.

	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(n)$
Enkelt-kædet sorteret liste ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Dobbelt-kædet sorteret liste ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Binær min-heap ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Rød-sort søge-træ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 4 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
for  $i = 1$  to  $n$ 
   $j = i$ 
  while  $j \geq 1$ 
     $j = j - 1$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $s = 0$ 
while  $n > 1$ 
  while  $n > 1$ 
     $n = \lfloor n/2 \rfloor$ 
   $n = \lfloor n/2 \rfloor$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $s = 0$ 
for  $i = 1$  to  $n$ 
  for  $j = 1$  to  $n$ 
    for  $k = 1$  to  $n$ 
       $s = s + 1$ 
```

Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

Opgave 5 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $i = 1$ 
 $j = n$ 
while  $i < j$ 
   $i = i + 1$ 
   $j = j - 1$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
while  $n > 0$ 
   $n = \lfloor n/2 \rfloor$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i = 1$ 
 $p = 1$ 
while  $p < n$ 
   $i = i + 1$ 
   $p = p * i$ 
```

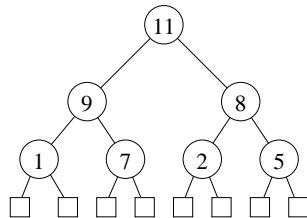
Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

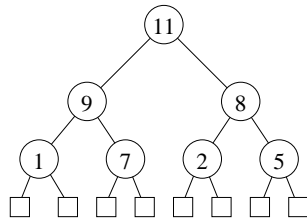
Opgave 6 (4%)

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 10.



Svar: _____

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en HEAP-EXTRACT-MAX operation.



Svar: _____

Opgave 7 (4%)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 3, 6, 4, 8, 5, 2, og 7 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: _____

Opgave 8 (4%)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	2	4	1	10	7	3	6	8	9

Svar: _____

Opgave 9 (4%)

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 4$, $k = 7$). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de *to* mindst betydende cifre.

1431 4123 6310 3131 5223 2531

Svar: _____

Opgave 10 (4%)

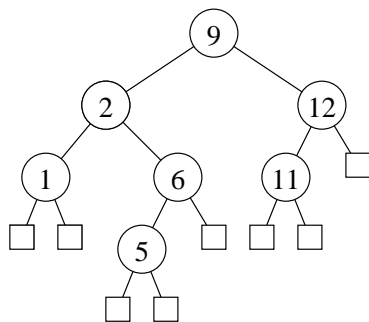
Angiv resultatet af at anvende PARTITION($A,5,10$) på nedenstående array.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	2	14	10	6	12	5	11	13	2	8	17	1	3	12	7	9

Svar: _____

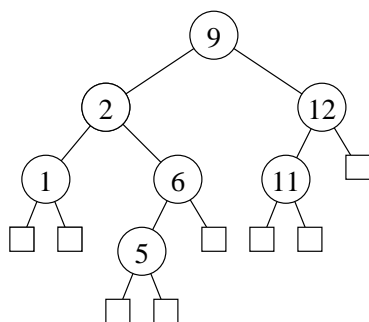
Opgave 11 (4%)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 3.



Svar: _____

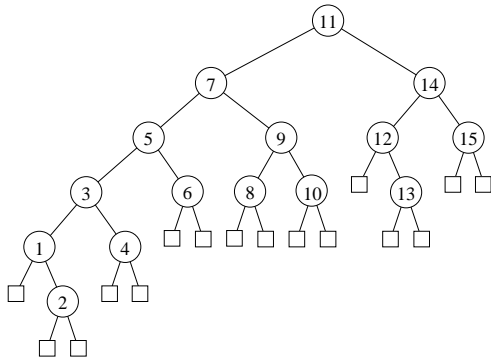
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 1.



Svar: _____

Opgave 12 (4%)

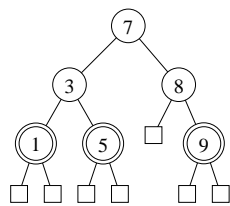
Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.



Svar: _____

Opgave 13 (4%)

Tegn hvordan nedenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 6.



Svar: _____

Opgave 14 (4%)

Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hash-funktionen er $h(k) = 2k \bmod 7$ og der indsættes elementerne 8, 6, 1, 15, 7 og 13 i den givne rækkefølge.

Svar: _____

Opgave 15 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *linear probing* ser ud efter at elementerne 8, 6, 1, 15, 13 og 2 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k) = 2k \bmod 7$.

0	1	2	3	4	5	6
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Svar: _____

Opgave 16 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *quadratic hashing* ser ud efter at elementerne 1, 6, 8, 2, 3 og 15 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er

$$h(k, i) = (2k + i + i^2) \bmod 7$$

0	1	2	3	4	5	6
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Svar: _____

Opgave 17 (4%)

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering. Angiv for hver knude rangen af knuden.

makeset(*a*)
makeset(*b*)
makeset(*c*)
makeset(*d*)
makeset(*e*)
makeset(*f*)
union(*a*,*b*)
union(*a*,*c*)
union(*d*,*e*)
union(*a*,*d*)
union(*c*,*f*)

Svar: _____

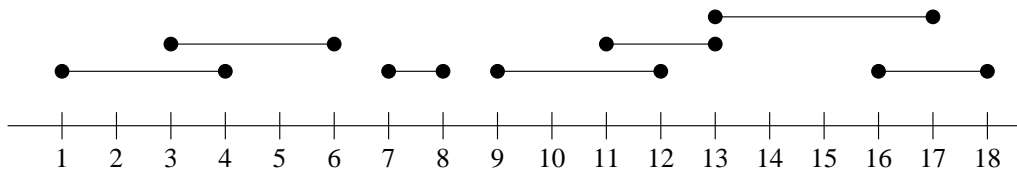
Opgave 18 (4%)

Betragt radix-sort anvendt til sortering af n tal, hvert tal bestående af w bits, og hvor hver iteration af counting-sort sorterer efter b bits. Hvad er udførelstiden af radix-sort ?

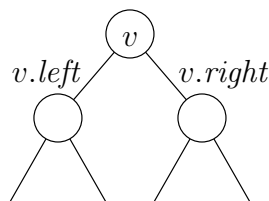
Svar: _____

Opgave 19 (4%)

For en mængde af intervaller, betegner vi med R det længste interval, der er foreningen af en delmængde af intervallerne og som indeholder det højreste endepunkt af alle intervallerne. F.eks. for nedenstående mængde af intervaller er $R = [9, 18]$.



Betragt et søgetræ hvor hver knude v gemmer et interval $[v.l, v.r]$ med endepunkter $v.l$ and $v.r$, og hvor intervallerne er sorteret fra venstre-mod-højre i søgetræet efter deres venstre endepunkt. I hver knude gemmes ud over $v.l$ og $v.r$ også $v.Rl$ og $v.Rr$, således at $[v.Rl, v.Rr]$ er R -intervallet for intervallerne gemt i v 's undertræ. Angiv hvorledes disse værdier kan beregnes når den tilsvarende information er kendt ved de to børn $v.left$ og $v.right$ (det kan antages at disse begge eksisterer).



Svar $v.Rr$ = _____

Svar $v.Rl$ = _____

Transitionssystem Frem-og-Tilbage
Konfigurationer: $\{2^i \cdot 3^k \mid \text{hvor } i, k \text{ er heltal} \wedge i \geq 0 \wedge k \geq 0\}$
 $2^i \cdot 3^k \triangleright 2^{i+2} \cdot 3^{k-1} \quad \text{if } k \geq 1$
 $2^i \cdot 3^k \triangleright 2^{i-1} \cdot 3^k \quad \text{if } i \geq 1$

Opgave 20 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem Frem-og-Tilbage. Startkonfigurationen antages at være $n = 2^{i_0} \cdot 3^{k_0}$.

	Ja	Nej
$2^i \cdot 3^k = n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2^i \cdot 3^k \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2^i \cdot 3^k \leq 4/3 \cdot n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i + k \leq \log_2 n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i + k \leq 2 \log_3 n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 21 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem Frem-og-Tilbage.

	Ja	Nej
$\mu(2^i \cdot 3^k) = 3i + k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(2^i \cdot 3^k) = i + k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(2^i \cdot 3^k) = i + 3k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(2^i \cdot 3^k) = i + 2k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(2^i \cdot 3^k) = 2i + 5k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Algoritme Square(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : $r = n^2$
Metode : $i \leftarrow 1$;
 $r \leftarrow 1$;
 { I } **while** $i < n$ **do**
 $i \leftarrow i + 1$;
 $r \leftarrow r + i$
 $r \leftarrow 2 * r - n$

Opgave 22 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Square.

	Ja	Nej
$i < n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = i^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = n(n + 1)/2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = i(i + 1)/2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r \geq i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 23 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Square.

	Ja	Nej
$\mu(n, i, r) = n^2 - i^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, i, r) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, i, r) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, i, r) = n^2 - r^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, i, r) = r - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 24 (4%)

Givet et positivt heltal n , så beregner nedenstående algoritme $n!$.

```
Algoritme Factorial( $n$ )  
Inputbetingelse : positivt heltal  $n \geq 1$   
Outputkrav      :  $r = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$   
Metode          :  $i \leftarrow n$ ;  
                  $r \leftarrow n$ ;  
                  $\{I_i \wedge I_r\}$  while  $i > 1$  do  
                    $i \leftarrow i - 1$ ;  
                    $r \leftarrow r * i$ 
```

For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_i og I_r være invarianter omkring variablerne i og r . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke).

Svar I_i : _____

Svar I_r : _____

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ : _____

Opgave 25 (4%)

En binær max-heap understøtter INSERT og HEAP-EXTRACT-MAX i worst-case $O(\log n)$ tid. Angiv en potentiale funktion så INSERT tager amortiseret $O(\log n)$ tid og HEAP-EXTRACT-MAX amortiseret $O(1)$ tid.

Svar Φ : _____