

Skriftlig Eksamen  
Algoritmer og Datastrukturer 1

Datalogisk Institut  
Aarhus Universitet

Mandag den 22. marts 2004, kl. 9.00–11.00

Navn \_\_\_\_\_

Årskort \_\_\_\_\_

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge et eller flere svar ved at afkrydse de tilsvarende rubrikker. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du kun sætter kryds ved det rigtige svar får du 1 point.
- Hvis du sætter  $a$  krydser, hvor det ene er det rigtige, får du  $1/a$  point.
- Hvis du vælger  $a$  krydser, hvor ingen er det rigtige, får du 0 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du  $1/k$  point, hvor  $k$  er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt  $v\%$  og med  $n$  delspørgsmål, hver med  $k$  svarmuligheder, hvor du opnår samlet  $s$  point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s - n/k}{n - n/k} \right\} \cdot v \%$$

**Opgave 1 (6 %)**

	Ja	Nej
$3n$ er $O(n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sqrt{n}$ er $O(n^2)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \cdot \log n$ er $O(n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n + \sqrt{n}$ er $O(n \cdot \log n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5n + 3n^2$ er $O(8n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 2 (6 %)**

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til  $O$ -notationen:

$$7n^2 + 3n$$
$$n + \sqrt{n}$$
$$n \cdot \log n$$
$$2^n$$

Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 3 (6 %)**

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af  $n$  i  $O$ -notation.

**Algoritme Loop1( $n$ )**

```
 $x \leftarrow 0$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
  for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do  
     $x \leftarrow x + i * j$ 
```

**Algoritme Loop2( $n$ )**

```
 $x \leftarrow 0$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
  for  $j \leftarrow 1$  to  $i$  do  
     $x \leftarrow x + i * j$ 
```

**Algoritme Loop3( $n$ )**

```
 $x \leftarrow 0$   
 $i \leftarrow 1$   
while ( $i \leq n$ )  
   $i \leftarrow i * 2$   
   $x \leftarrow x + 1$ 
```

Svar Loop1: \_\_\_\_\_

Svar Loop2: \_\_\_\_\_

Svar Loop3: \_\_\_\_\_

### Opgave 4 (5%)

Tillader nedenstående datastrukturer indsættelser af nye elementer i tid  $O(\log n)$ ?

	Ja	Nej
Usorteret kædet liste	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Heap	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AVL-træ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Tillader nedenstående datastrukturer at slette elementet med den mindste nøgle i tid  $O(\log n)$ ?

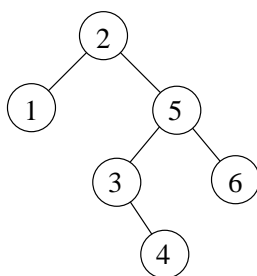
	Ja	Nej
Usorteret kædet liste	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Heap	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AVL-træ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Tillader nedenstående datastrukturer at finde et element med en given nøgle i tid  $O(\log n)$ ?

	Ja	Nej
Usorteret kædet liste	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Heap	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AVL-træ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Opgave 5 (6%)

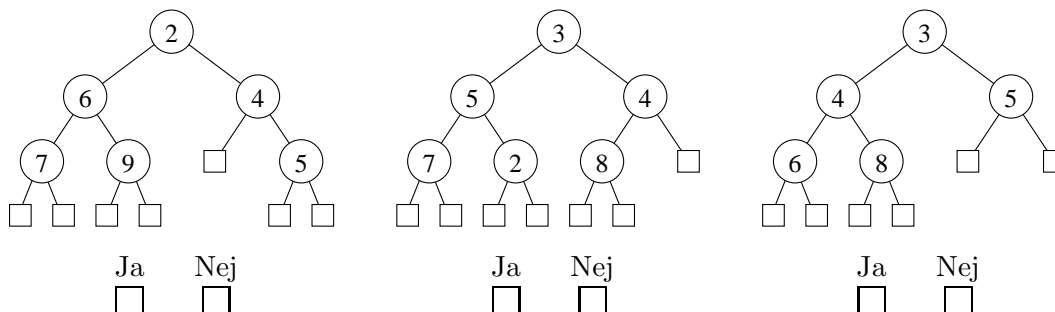
Angiv for hver af nedenstående sekvenser om den angiver et preorder, postorder, eller et inorder gennemløb af nedenstående træ.



	Preorder	Postorder	Inorder	Hverken preorder, postorder, eller inorder
1 4 3 6 5 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1 4 3 5 6 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1 2 3 4 5 6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2 1 5 3 4 6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6 5 4 3 2 1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

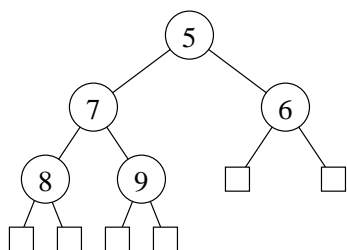
**Opgave 6 (5%)**

Angiv for hver af nedenstående binære træer om det er en lovlig heap.



**Opgave 7 (5%)**

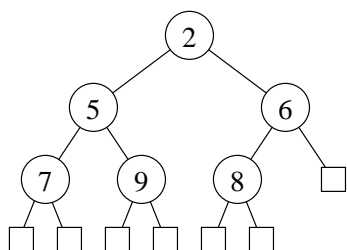
Tegn hvordan nedenstående heap ser ud efter indsættelse af elementet 4.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 8 (6%)**

Tegn hvordan nedenstående heap ser ud efter en removeMin operation.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 9 (6%)**

Nedenstående er en hashtabel hvor der er anvendt *linear probing*. Den anvendte hashfunktion er  $h(k) = k * 3 \text{ mod } 17$ . Tegn hvordan hashtabellen ser ud efter at  $k = 25$  indsættes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17						2	8	19	14		15	4	10		5	

Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 10 (6%)**

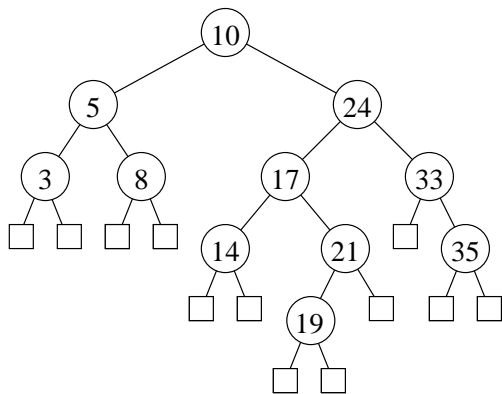
Nedenstående er en hashtabel hvor der er anvendt *linear probing*. Den anvendte hashfunktion er  $h(k) = k * 3 \text{ mod } 17$ . Tegn hvordan hashtabellen ser ud efter at  $k = 2$  slettes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17						2	8	19	14		15	4	10		5	

Svar: \_\_\_\_\_

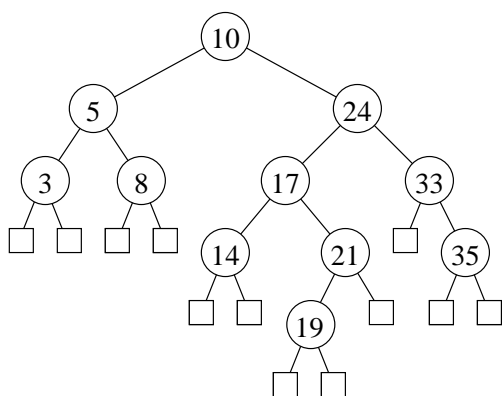
**Opgave 11 (6%)**

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 15.



Svar: \_\_\_\_\_

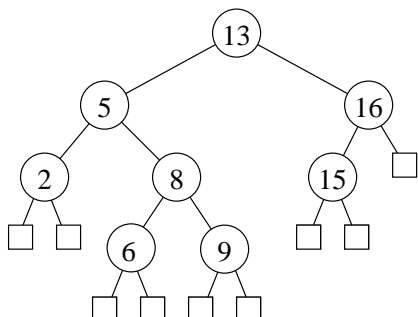
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 24.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 12 (6%)**

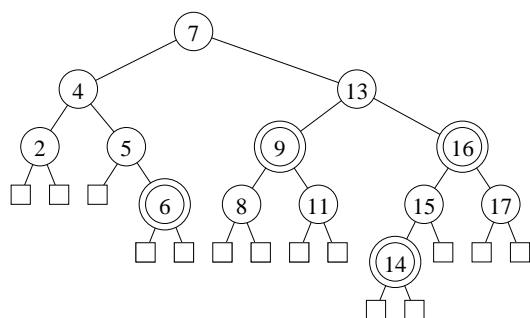
Tegn hvordan nedenstående AVL-træ ser ud efter indsættelse af elementet 12.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 13 (5%)**

Nedenstående er et rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder). Tegn det korresponderende (2,4) træ.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 14 (6%)**

Betragt den træ-baserede union-find datastruktur, hvor man anvender union-by-size heuristikken. Hvad er højden af træet der repræsenterer en mængde med  $n$  elementer, udtrykt i  $O$ -notation?

Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 15 (6%)**

Angiv 3 sorteringsalgoritmer til sortering af  $n$  elementer, som har forventet eller worst-case  $O(n \cdot \log n)$  udførselstid.

Svar 1: \_\_\_\_\_

Svar 2: \_\_\_\_\_

Svar 3: \_\_\_\_\_

### Opgave 16 (6 %)

**Algoritme** Loop( $n$ )  
Inputbetingelse :  $n \geq 1$   
Outputkrav : –  
Metode :  $i \leftarrow 1$ ;  
          **while**  $i < n$  **do**  
            **if** ( $2 * i \leq n$ )  
               $i \leftarrow 2 * i$   
            **else**  
               $i \leftarrow i + 1$

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme.

	Ja	Nej
$\mu(i, n) = n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = \log n - \log i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = 2^n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Opgave 17 (8 %)

Nedenstående algoritme beregner summen af elementerne i et array. For at vise gyldigheden af algoritmen skal  $I_i$  og  $I_s$  være invarianter omkring  $s$  og  $i$ . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke).

**Algoritme** Sum( $A$ )  
Inputbetingelse : Array  $A$  af  $n$  heltal,  $n \geq 1$   
Outputkrav :  $s = \sum_{j=0}^{n-1} A[j]$   
Metode :  $s \leftarrow 0$ ;  
           $i \leftarrow 0$ ;  
           $\{I_i \wedge I_s\}$  **while**  $i < n$  **do**  
             $s \leftarrow s + A[i]$ ;  
             $i \leftarrow i + 1$

Svar  $I_i$ : \_\_\_\_\_

Svar  $I_s$ : \_\_\_\_\_

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar  $\mu$ : \_\_\_\_\_