

Skriftlig Eksamen Algoritmer og Datastrukturer 1

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et korkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s}{n} \right\} \cdot v \%$$

Opgave 1 (4%)

	Ja	Nej
$7n^2$ er $O(10n \cdot \log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3^n er $O(n^4)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^2 + 7n$ er $O(n^3)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \cdot \log n$ er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sqrt{n} \cdot \log n$ er $O(n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (4%)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O -notationen:

$$4^n \cdot n$$
$$3n$$
$$n^2 / \log n$$
$$5^n$$
$$\sqrt{n} \cdot (\log n)^2$$

Svar: _____

Opgave 3 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)
 $x \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
 for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
 $x \leftarrow x + 1$

Algoritme Loop2(n)
 $i \leftarrow 1$
while $i \leq n$ **do**
 $i \leftarrow 2 * i$

Algoritme Loop3(n)
 $i \leftarrow 1$
 $x \leftarrow 0$
while $i \leq n$ **do**
 for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
 $x \leftarrow x + 1$
 $i \leftarrow 2 * i$

Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

Opgave 4 (4%)

Angiv for hver af nedenstående rekursive algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

```
Algoritme Rec1( $n$ )  
  if  $n \leq 1$  then  
    return 1  
  else  
    return 1 + Rec1( $n - 1$ )
```

```
Algoritme Rec2( $n$ )  
  if  $n \leq 1$  then  
    return 1  
  else  
    return Rec2( $n/2$ ) + Rec2( $n/2$ )
```

```
Algoritme Rec3( $n$ )  
  if  $n \leq 1$  then  
    return 1  
  else  
    return 1 + Rec3( $n/2$ )
```

Svar Rec1: _____

Svar Rec2: _____

Svar Rec3: _____

Opgave 5 (4%)

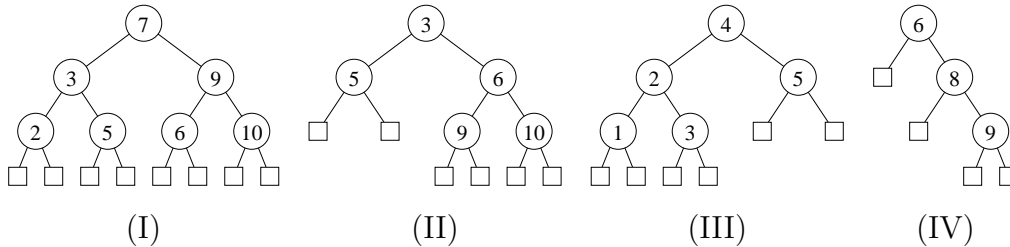
Betragt radix-sort anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 4$, $N = 10$). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de to mindst betydende cifre.

1981 1324 1715 1011 2414 1314

Svar: _____

Opgave 6 (4%)

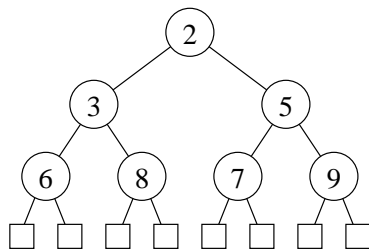
Angiv for hver af nedenstående binære træer om det er et lovligt ubalanceret binært søgetræ eller opfylder heap-order med hensyn til minimum.



	Søgetræ	Heap-order	Både søgetræ og heap-order	Hverken søgetræ eller heap-order
(I)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(II)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(III)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(IV)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 7 (4%)

Tegn hvordan nedenstående binære heap ser ud efter indsættelse af elementet 4.



Svar: _____

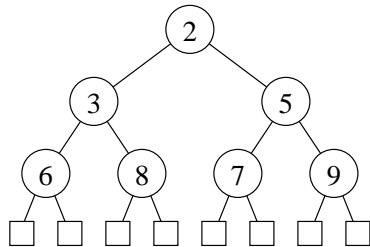
Opgave 8 (4%)

Tegn den binære heap efter indsættelse af elementerne 6, 5, 4, 3, 2, 1 i en heap i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: _____

Opgave 9 (4%)

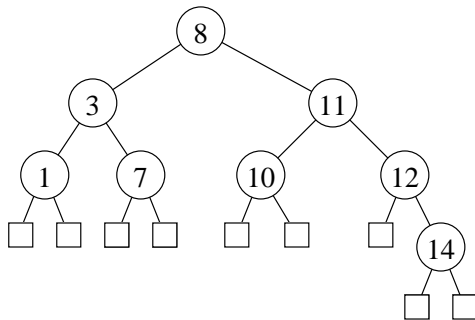
Tegn hvordan nedenstående binære heap ser ud efter en removeMin operation.



Svar: _____

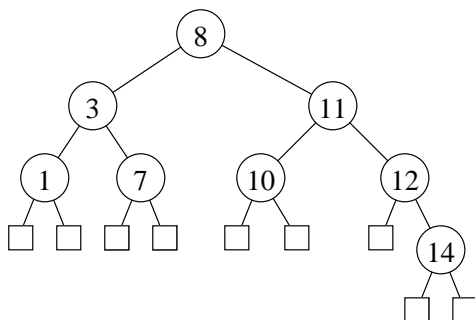
Opgave 10 (4%)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 4.



Svar: _____

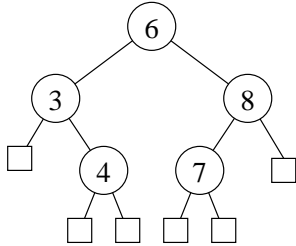
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 8.



Svar: _____

Opgave 11 (4%)

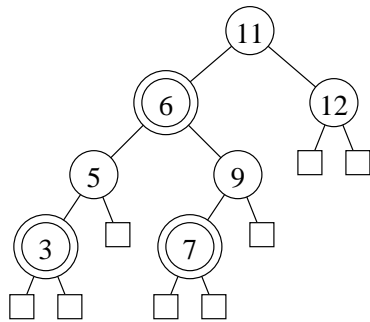
Tegn hvordan nedenstående AVL-træ ser ud efter indsættelse af elementet 5.



Svar: _____

Opgave 12 (4%)

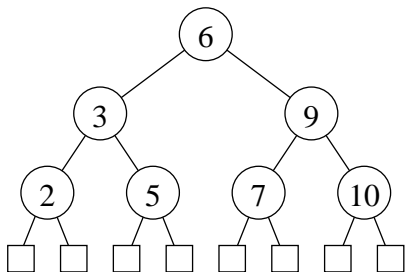
Tegn hvordan nedenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 8.



Svar: _____

Opgave 13 (4%)

Tegn hvordan nedenstående (2,4)-træ ser ud efter slettelse af elementet 6.



Svar: _____

Opgave 14 (4%)

Nedenstående er en hashtabel hvor der er anvendt *linear probing*. Den anvendte hash-funktion er $h(k) = k \bmod 13$. Tegn hvordan hashtabellen ser ud efter at $k = 5$ og $k = 20$ indsættes i den givne rækkefølge.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
			16	3	17	4						

Svar: _____

Opgave 15 (4%)

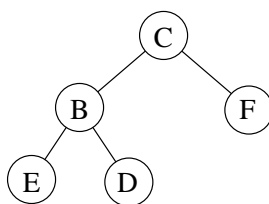
Nedenstående er en hashtabel hvor der er anvendt *linear probing*. Den anvendte hash-funktion er $h(k) = k \bmod 13$. Tegn hvordan hashtabellen ser ud efter at $k = 3$ slettes fra hashtabellen (der må ikke bruges dummy elementer).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
			16	3	17	4						

Svar: _____

Opgave 16 (4%)

Angiv for hver af nedenstående sekvenser om den angiver et preorder, postorder, eller et inorder gennemløb af nedenstående binære træ.



	Preorder	Postorder	Inorder	Hverken preorder, postorder, eller inorder
C B E D F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C B F E D	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E D B F C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E B D C F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E D B C F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 17 (4%)

Tegn det binære træ hvor alle knuder har 0 eller 2 børn og hvor henholdsvis et preorder og postorder gennemløb giver:

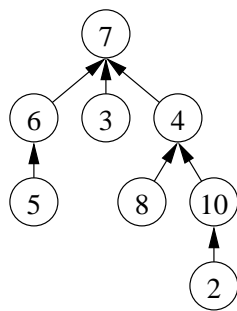
Preorder : 2 7 4 5 1 3 6

Postorder : 7 1 3 5 6 4 2

Svar: _____

Opgave 18 (4%)

Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter FIND(10), når der anvendes stikomprimering.



Svar: _____

Opgave 19 (4%)

Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter

$\text{UNION}(\text{UNION}(\text{UNION}(1,2),3),\text{UNION}(4,5))$

når der anvendes union-by-size heuristikken.



Svar: _____

Opgave 20 (4%)

Angiv for randomiseret quick-select den forventede og worst-case udførselstid.

Forventet : _____

Worst-case : _____

Transitionssystem Countdown(i, j)
Configurations: $\{[i, j] \mid i, j \geq 0\}$
 $[i, j] \triangleright [i - 1, j + 2] \quad \mathbf{if} \quad i > 0$
 $[i, j] \triangleright [i, j - 1] \quad \mathbf{if} \quad j > 0$

Opgave 21 (4%)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem Countdown. Startkonfigurationen antages at være $[i_0, j_0]$.

	Ja	Nej
$0 \leq i \leq i_0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$0 \leq j \leq j_0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2i + j \leq 2i_0 + j_0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j \leq 2i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j - j_0 \leq 2i_0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 22 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem Countdown.

	Ja	Nej
$\mu(i, j) = i + j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = i \cdot j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = \max\{i, j\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = 3i + j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Algoritme Loop(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : –
Metode : $i \leftarrow 1$;
 $j \leftarrow 0$;
{ I } **while** $j < n$ **do**
 $j \leftarrow j + i$;
 $i \leftarrow i + i$

Opgave 23 (4%)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$0 \leq j \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j < i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j = i - 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j = 2i - 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i = 2^j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 24 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$\mu(i, n) = i + j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = n - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = 2n - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = 2n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = i - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 25 (4%)

Nedenstående algoritme beregner n^m . For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_n , I_m og I_r være invarianter omkring variablerne n , m og r . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke).

```
Algoritme Exp( $n, m$ )  
Inputbetingelse : heltal  $n, m \geq 1$   
Outputkrav      :  $r = n^m$   
Metode          :  $r = 1$ ;  
                  { $I_n \wedge I_m \wedge I_r$ } while  $m \geq 1$  do  
                     $m \leftarrow m - 1$ ;  
                     $r \leftarrow r * n$ 
```

Svar I_n : _____

Svar I_m : _____

Svar I_r : _____

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ : _____