

DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12 (tolv)
Eksamensdag: Fredag den 11. august 2006, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale: Trøjborg, Willemoesgade 15, Århus N, 8200 Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater)
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort _____

Navn _____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Fredag den 11. august 2006, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s}{n} \right\} \cdot v \%$$

Opgave 1 (4%)

	Ja	Nej
$5n^3$ er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \cdot \log n$ er $O(7(\log n)^3)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3^n er $O(n^3)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
\sqrt{n} er $O(n/\log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^2 + n^2$ er $\Omega(n^4)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (4%)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O -notationen:

$$\begin{aligned} &\sqrt{n} \cdot \log n \\ &(\log n)^2 \\ &n^{3/2} \\ &2^n \\ &\sqrt{\log n} \end{aligned}$$

Svar: _____

Opgave 3 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $x \leftarrow 0$   
 $i \leftarrow n$   
while  $i > 0$  do  
  for  $j \leftarrow 1$  to  $i$  do  
     $x \leftarrow x + 1$   
   $i \leftarrow i - 1$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $x \leftarrow 0$   
 $i \leftarrow 1$   
while  $i < n$  do  
  for  $j \leftarrow 1$  to  $i$  do  
     $x \leftarrow x + 1$   
   $i \leftarrow 2 * i$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
 $j \leftarrow 1$   
while  $j < n$  do  
   $j \leftarrow j + i$   
   $i \leftarrow i + 1$ 
```

Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

Opgave 4 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $x \leftarrow 0$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
  for  $j \leftarrow 1$  to  $i * i$  do  
     $x \leftarrow x + 1$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $i \leftarrow n$   
 $x \leftarrow 0$   
while  $i \geq 1$  do  
   $j \leftarrow i$   
  while  $j \geq 1$  do  
     $x \leftarrow x + 1$   
     $j \leftarrow \lfloor j/2 \rfloor$   
   $i \leftarrow \lfloor i/2 \rfloor$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $k \leftarrow 1$   
   $j \leftarrow 1$   
  while  $j \leq n$  do  
     $k \leftarrow k + 1$   
     $j \leftarrow j + k$   
   $i \leftarrow i * 2$ 
```

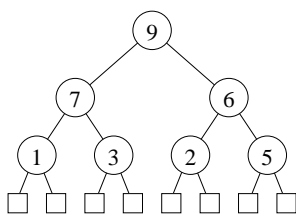
Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

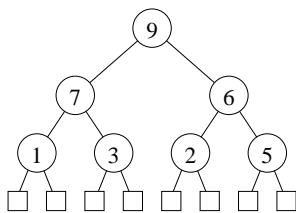
Opgave 5 (4%)

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 8.



Svar: _____

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en heap-extract-max operation.



Svar: _____

Opgave 6 (4%)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 og 8 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: _____

Opgave 7 (4%)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af build-max-heap for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7
3	2	7	4	1	9	6

Svar: _____

Opgave 8 (4%)

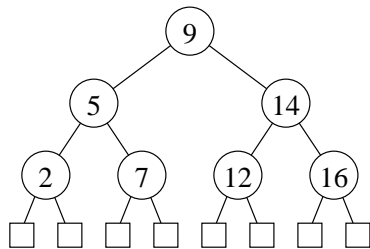
Betragt radix-sort anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 4$, $k = 10$). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de to mindst betydende cifre.

7811 6905 1499 2211 8006 1399

Svar: _____

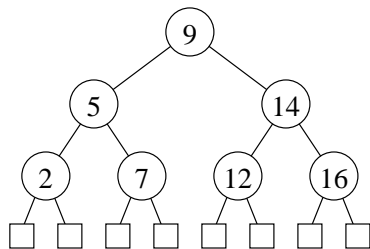
Opgave 9 (4%)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 3.



Svar: _____

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 9.



Svar: _____

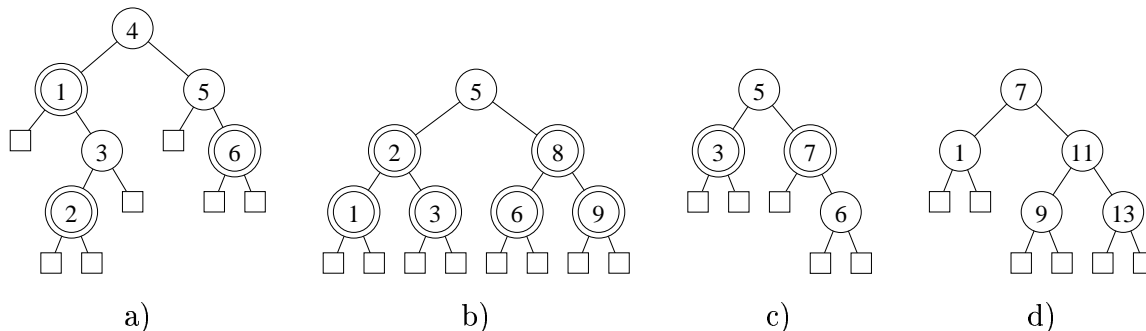
Opgave 10 (4%)

Afgør for nedenstående udsagn om de er sande for ethvert rød-sort søgetræ med n interne knuder.

	Ja	Nej
Der er højst dobbelt så mange røde knuder som sorte knuder ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antal røde knuder på alle rod til blad stier er det samme ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Der findes en sti fra roden til et blad hvor alle knuder er sorte ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antal rotationer under en indsættelse er $O(1)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antal omfarvninger af knuder under en indsættelse er $O(1)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antal blade = antal interne knuder + 1 ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 11 (4%)

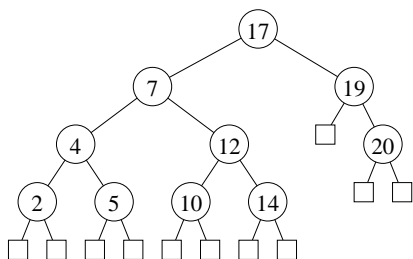
Angiv for hvert af nedenstående træer om det er et lovligt søgetræ, et lovligt rød-sort søgetræ, eller ingen af delene (dobbeltcirkler angiver røde knuder).



	Rød-sort søgetræ	Søgetræ, men ikke rød-sort	Ikke et søgetræ
a)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 12 (4%)

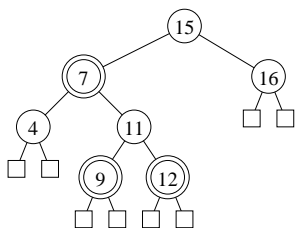
Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.



Svar: _____

Opgave 13 (4%)

Tegn hvordan nedenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 13.



Svar: _____

Opgave 14 (4%)

Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hash-funktionen er $h(k) = k * 2 \bmod 5$ og der indsættes elementerne 2, 3, 1, 7, 5, og 9 i den givne rækkefølge.

Svar: _____

Opgave 15 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel, der anvender *linear probing* med hashfunktionen $h(k) = 5 \cdot k \bmod 13$, ser ud efter at elementerne 3, 2, 11, 12, 7, 16, 6, og 1 er indsat i den givne rækkefølge startende med en tom hashtabel.

Svar: _____

Opgave 16 (4%)

Nedenstående er en hashtabel hvor der er anvendt *double hashing*. Den anvendte hash-funktion er

$$h(k, i) = h_1(k) + i \cdot h_2(k) \bmod 9$$

hvor $h_1(k) = k \bmod 9$ og $h_2(k) = 1 + (k \bmod 7)$.

Tegn hvordan hashtabellen ser ud efter at $k = 9$, $k = 4$ og $k = 14$ indsættes i den givne rækkefølge.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
				13				

Svar: _____

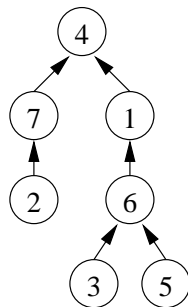
Opgave 17 (4%)

Angiv for hver af nedenstående datastrukturer udførelstiden for indsættelsen af elementerne fra henholdsvis de to sekvenser $1, 2, 3, \dots, n$ og $n, n - 1, n - 2, \dots, 1$, når der altid startes med en tom datastruktur..

Datastruktur	$1, 2, 3, \dots, n$	$n, n - 1, n - 2, \dots, 1$
MaxHeap	_____	_____
Sorteret enkelt-kædet liste	_____	_____
Rød-sort søgetræ	_____	_____

Opgave 18 (4%)

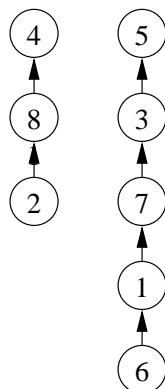
Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter FIND(7) efterfulgt af FIND(3), når der anvendes stikomprimering.



Svar: _____

Opgave 19 (4%)

Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter UNION(2,7), når der anvendes både union-by-size og stikomprimering.



Svar: _____

Transitionssystem Counting
Configurations: $\{[i, j] \mid i, j \geq 1\}$
 $[i, j] \triangleright [i, 2j] \quad \text{if } j \leq 10$
 $[i, j] \triangleright [i - 1, j - 10] \quad \text{if } j > 10 \wedge i > 1$

Opgave 20 (4%)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem Counting. Startkonfigurationen antages at være $[10, 10]$.

	Ja	Nej
$1 \leq j \leq 10$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1 \leq i \leq 10$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$10 \leq j \leq 20$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j \geq i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i * 20 - j \leq 200$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 21 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem Counting.

	Ja	Nej
$\mu(i, j) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = i - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = i * 20 - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = i^2 - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = j - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Algoritme Loop(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : –
Metode : $i \leftarrow 1$;
 $j \leftarrow n - 1$;
{ I } **while** $j > 0$ **do**
 $j \leftarrow j - i$;
 $i \leftarrow i + i$

Opgave 22 (4%)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$i + j = n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$0 \leq i \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$0 \leq j \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i = 2^j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 23 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$\mu(i, j, n) = j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = n + j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = j + i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = i * j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 24 (4 %)

Nedenstående algoritme beregner $r = \lceil \log \log n \rceil$, dvs. det mindste r hvor $2^{2^r} \geq n$. For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_n , I_r og I_s være invarianter omkring variablerne n , r og s . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke).

```
Algoritme LogLog( $n$ )  
Inputbetingelse : heltal  $n \geq 2$   
Outputkrav      :  $r = \lceil \log \log n \rceil$   
Metode          :  $s = 2$ ;  
                  $r = 0$ ;  
                  $\{I_n \wedge I_r \wedge I_s\}$  while  $s < n$  do  
                    $s \leftarrow s * s$ ;  
                    $r \leftarrow r + 1$ 
```

Svar I_n : _____

Svar I_r : _____

Svar I_s : _____

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ : _____

Opgave 25 (4 %)

Betragt en dobbelt-kædet liste hvor vi vedligeholder en pointer p til et element i listen. Operationerne $\text{next}(p)$ og $\text{prev}(p)$ flytter p til henholdsvis den umiddelbare forgænger og efterfølger til p i listen. Operationen $\text{reset}(p)$ flytter p til det første element i listen ved gentagne gang at kalde $\text{prev}(p)$, og tager tid $O(i)$ hvis når p peger på det i te element i listen.

For at argumentere at operationerne next , prev og reset tager $O(1)$ *amortiseret tid*, kræves en passende potentiale funktion. For hver af nedenstående funktioner, angiv om de kan anvendes som en potentiale funktion for et sådant argument.

	Ja	Nej
$\Phi(i) = i^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\Phi(i) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\Phi(i) = \log i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\Phi(i) = 3i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\Phi(i) = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>