DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 13 (tretten)
Eksamensdag: Mandag den 6. august 2007, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale: Åbogade 34, Benjaminbygning, indgang B
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort ____________________

Navn ____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Mandag den 6. august 2007, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\,\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max\left\{0\,,\,\frac{s}{n}\right\}\,\cdot\,v\,\%$$

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 1 (4 %)

	Ja	Nej
$4n^8$ er $O(8 \cdot 4^n)$?	☐	☐
$4^{n/2}$ er $O(2^n)$?	☐	☐
$(\log n)/n^3$ er $O(1)$?	☐	☐
$n^2 + 3^n$ er $O(2^n)$?	☐	☐
$\sqrt{n} \cdot \log n$ er $O(n)$?	☐	☐

Opgave 2 (4 %)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O-notationen:

$$(\sqrt{n})^{\log n}$$
$$\sqrt{n}/\log n$$
$$1/(n^2)$$
$$n^7$$
$$42n$$

Svar: ______________________________

Opgave 3 (4 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O-notation.

```
Algoritme Loop1(n)
  x ← 0
  for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to n do
      for k ← 1 to n do
        x ← x + 1
```

```
Algoritme Loop1(n)
  x ← 0
  for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to i do
      for k ← j to n do
        x ← x + 1
```

```
Algoritme Loop3(n)
  i ← 1
  while i ≤ n do
    j ← 1
    while j ≤ n do
      k ← 1
      while k ≤ n do
        k ← k + 1
      j ← j * 2
    i ← i * 2
```

Svar Loop1: ______________________

Svar Loop2: ______________________

Svar Loop3: ______________________

Opgave 4 (4 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O-notation.

```
Algoritme Loop1(n)
  i ← n
  j ← 1
  while i ≥ 1 do
    k ← n
    l ← 1
    while k ≥ 1 do
      l ← l + 1
      k ← k − l
    j ← j + 1
    i ← i − j
```

```
Algoritme Loop2(n)
  i ← 1
  while i ≤ n do
    k ← 1
    l ← 1
    while k ≤ n do
      l ← l + 1
      k ← k + l
    i ← i * 2
```

```
Algoritme Loop2(n)
  i ← 1
  j ← 1
  while i ≤ n do
    i ← i * 2
    while j < i do
      j ← j + 1
```

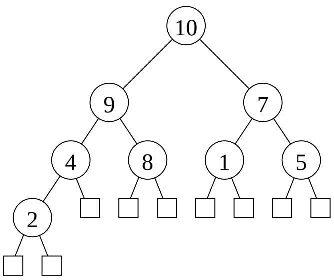
Svar Loop1: ____________________

Svar Loop2: ____________________

Svar Loop3: ____________________

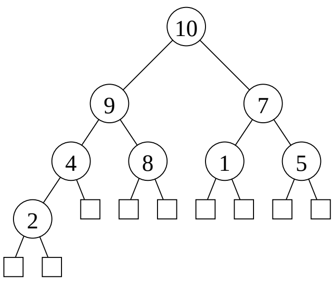
Opgave 5 (4 %)

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 13.



Svar: ____________________

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en heap-extract-max operation.



Svar: ____________________

Opgave 6 (4 %)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 7, 2, 6, 3, 4, 5 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: ____________________________

Opgave 7 (4 %)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af build-max-heap for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	2	3	9	4	1	10	11	5	8	6	13	12

Svar: ____

Opgave 8 (4 %)

Betragt en binær max-heap med n forskellige elementer. Angiv hvilke af følgende udsagn er sande.

	Ja	Nej
Det mindste element kan findes i tid $O(1)$	☐	☐
Det største element kan findes i tid $O(\log n)$	☐	☐
Højden af en binær max-heap er $\lceil \log n \rceil$	☐	☐
Det næststørste og tredie største element er børn af roden	☐	☐
Man kan søge efter et element x i tid $O(\log n)$	☐	☐

Opgave 9 (4 %)

Hvad er udførselstiden for indsættelse af følgende sekvens af n elementer i nedenstående datastrukturer? Det antages at elementerne indsættes enkeltvis i den givne rækkefølge.

a) $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$

a) Ubalanceret søgetræ Svar: ______________

b) Rød-sort søgetræ Svar: ______________

c) Heap Svar: ______________

d) Stak Svar: ______________

Opgave 10 (4 %)

Betragt radix-sort anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 4$, $k = 10$). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de to mindst betydende cifre.

4569 1778 8327 4353 9913 4227 4469

Svar: ____

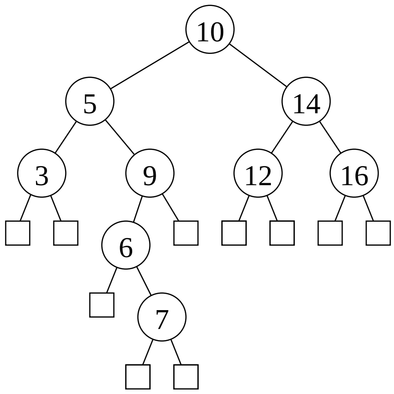
Opgave 11 (4 %)

Angiv alle mulige binære max-heaps for mængden $\{1, 3, 5, 7\}$.

Svar: ____

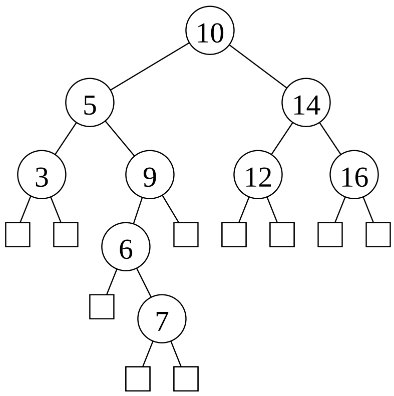
Opgave 12 (4 %)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 11.



Svar: ______________________________

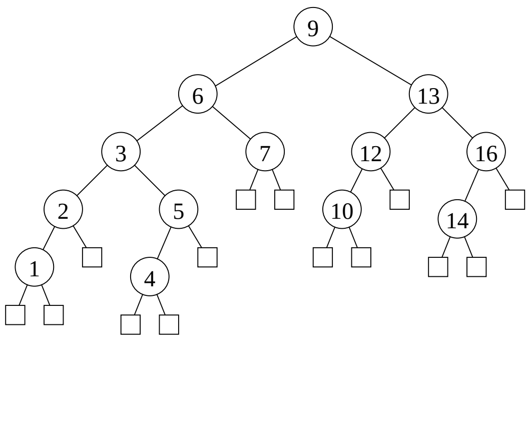
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 10.



Svar: ______________________________

Opgave 13 (4 %)

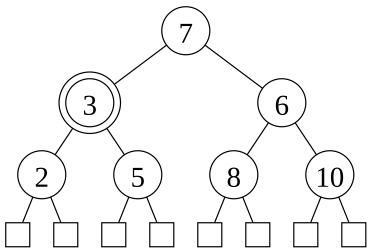
Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.



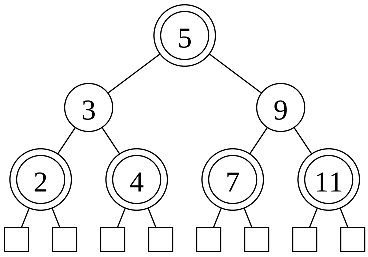
Svar: ______________________________

Opgave 14 (4 %)

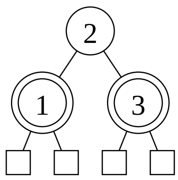
Angiv for hvert af nedenstående træer om det er et lovligt søgetræ, et lovligt rød-sort søgetræ, eller ingen af delene (dobbeltcirkler angiver røde knuder).



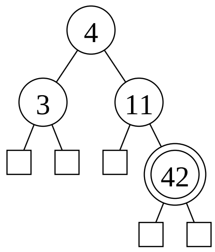
a)



b)



c)

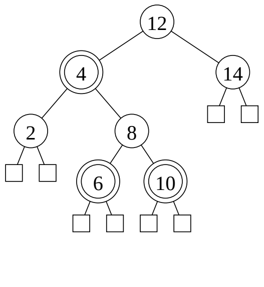


d)

	Rød-sort søgetræ	Søgetræ, men ikke rød-sort	Ikke et søgetræ
a)	☐	☐	☐
b)	☐	☐	☐
c)	☐	☐	☐
d)	☐	☐	☐

Opgave 15 (4 %)

Tegn hvordan nedenstående rød-sorte træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 7.



Svar: ______________________________

Opgave 16 (4 %)

Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hashfunktionen er $h(k) = k * 3 \bmod 6$ og der indsættes elementerne 1, 2, 3, 4, 5 og 6 i den givne rækkefølge.

Svar: ____

Opgave 17 (4 %)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *linear probing* ser ud efter at elementerne 2, 7, 6, 10, 11, 1, 4, og 3 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k) = 2 * k \bmod 9$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8

Svar: ____

Opgave 18 (4 %)

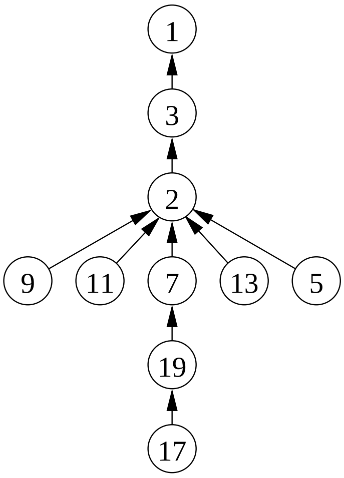
I nedenstående hashtabel er der anvendt *linear probing* med hashfunktionen $h(k) = k \bmod 11$. Tegn hvordan hashtabellen kan se ud efter at 4 slettes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			14	4	15	6	3	17		

Svar: ____

Opgave 19 (4 %)

Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter FIND(19), når der anvendes stikomprimering.



Svar: ____________________

Opgave 20 (4 %)

Hvor lang tid tager det at slette det største element fra:

a) et rød-sort søgetræ Svar: __________

b) en min-heap Svar: __________

c) en usorteret cyclisk dobbelt kædet liste Svar: __________

d) en sorteret cyclisk dobbelt kædet liste Svar: __________

Transitionssystem DownSum
Konfigurationer: $\{[i,n,s] \mid i,n,s \geq 0\}$
$[i,n,s] \triangleright [i-1,n,s+2i-1]$ **if** $i \geq 1$

Opgave 21 (4 %)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem DownSum. Startkonfigurationen antages at være $[n,n,0]$ hvor $n \geq 0$.

	Ja	Nej
$i \leq n$	☐	☐
$s \geq n$	☐	☐
$i - s \geq 0$	☐	☐
$s = i^2$	☐	☐
$s = n^2 - i^2$	☐	☐

Opgave 22 (4 %)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem DownSum.

	Ja	Nej
$\mu(i,n,s) = i$	☐	☐
$\mu(i,n,s) = n - i$	☐	☐
$\mu(i,n,s) = s$	☐	☐
$\mu(i,n,s) = n^2 - s$	☐	☐
$\mu(i,n,s) = n^2 - i^2 - s$	☐	☐

Algoritme Loop(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : –
Metode : $i \leftarrow 0$;
$j \leftarrow 0$;
$\{I\}$ **while** $i < n$ **or** $j < n$ **do**
  if $i < j$ **do** $i \leftarrow i + 2$;
  else $j \leftarrow j + 3$

Opgave 23 (4 %)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$i \leq n$	☐	☐
$j \geq i - 1$	☐	☐
$i + j \leq 2n + 3$	☐	☐
$\min\{i, j\} \leq n + 1$	☐	☐
$i * j \leq n^2$	☐	☐

Opgave 24 (4 %)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$\mu(i, j, n) = n - i$	☐	☐
$\mu(i, j, n) = 2n + 3 - i - j$	☐	☐
$\mu(i, j, n) = j - i$	☐	☐
$\mu(i, j, n) = n^2 - i^2 - j^2$	☐	☐
$\mu(i, j, n) = i^2 - j^2$	☐	☐

Opgave 25 (4 %)

Nedenstående algoritme beregner n^2 for et heltal $n \geq 0$. For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_i og I_s være invarianter omkring variablerne i og s. Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke). Det antages at n ikke kan ændres af algoritmen.

Algoritme Square(n)
Inputbetingelse : Heltal $n \geq 0$
Outputkrav : $s = n^2$
Metode : $s = 0;$
$i = 1;$
$\{I_i \ \wedge \ I_s\}$ **while** $i \leq n$ **do**
$s \leftarrow s + i;$
$i \leftarrow i + 1;$
$s \leftarrow 2 * s - n$

Svar I_i: ____________________________

Svar I_s: ____________________________

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ: ____________________________