Opgave 41 Fibonacci

Det n'te Fibonaccital, F_n, er defineret ved:

$$\begin{array}{rcl} F_0 & = & 1 \\ F_1 & = & 1 \\ F_n & = & F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{for } n > 1. \end{array}$$

a) Bevis, at følgende algoritme er gyldig og terminerer:

Algoritme: Fibonacci(n)
Inputbetingelse : $n \geq 0$
Outputkrav : $r = F_n$
Metode : $r \leftarrow 1;\quad s \leftarrow 1;\quad i \leftarrow 0;$
$\{I\}$while $i \neq n$ do
$r \leftarrow s;$
$s \leftarrow s + r;$
$i \leftarrow i + 1$

– hvor I er udsagnet $(r = F_i) \wedge (s = F_{i+1}) \wedge (0 \leq i \leq n)$.

b) Lad i det følgende R og K betegne 2×2-matricer med indgangene

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Produktet af R og K er defineret som

$$R \cdot K = \begin{bmatrix} r_{11}k_{11} + r_{12}k_{21} & r_{11}k_{12} + r_{12}k_{22} \\ r_{21}k_{11} + r_{22}k_{21} & r_{21}k_{12} + r_{22}k_{22} \end{bmatrix}$$

Vis, at for ethvert $n \geq 0$, vil beregningen

$$\begin{array}{l} K \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ R \leftarrow K^n; \\ r \leftarrow r_{11} \end{array}$$

sætte r til det n'te Fibonaccital. (Husk, at K^0 er identitetsmatricen, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

Hvordan ville du implementere denne algoritme?