

Indledende Mål- og Integralteori af Steen Thorbjørnsen

Eksamen

- 1.a Redegør for, at B er en Borelmængde: Anvend 1.5.5.
 1.b Udregn $\lambda_2(B)$: Anvend 4.3.8.
 2.a Redegør for, at $f \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))^+$: Anvend 1.4.8 og 1.5.4.
 3.b Vis, at $f_n \in \mathcal{L}^1(\lambda)$: Domineret konvergens 2.5.3.
 4.c Vis, at F er \mathcal{E} - \mathcal{E} -målelig. Anvend 1.4.6(iv).
 4.d Vis, at $F^{-1}(E) = E$ for alle E i \mathcal{E} . Anvend 1.1.11.
 Før du integrerer: Redegør for, at funktionen er i $\mathcal{L}(\lambda)$.

1 Målelighed og mål

1.1 Målelige mængder - begrebet σ -algebra

Definition 1.1.1 af σ -algebra	4
Lemma 1.1.3 Lukkethedsegenskaber i σ -algebraer	5
<i>Eksempel 1.1.4</i>	5
Sætning 1.1.6	7
Sætning 1.1.7 Inklusion af σ -algebra i anden σ -algebra ud fra frembringer	7
Definition 1.1.8	8
<i>Bemærkning 1.1.9</i> Inklusion af σ -algebra i anden σ -algebra ud fra frembringer	8
<i>Eksempel 1.1.10</i>	8
Sætning 1.1.11 Alle mgd. i frembringer har egenskab \Rightarrow Alle mgd. i σ -algebra har egenskab	9
<i>Eksempel 1.1.12</i>	10

1.2 Borel-algebraen i \mathbb{R}^d

Definition 1.2.1 Metrik	11
Definition 1.2.2 Borel-algebraen frembragt af de åbne mængder	12
Sætning 1.2.3	12
Lemma 1.2.4	12
Korollar 1.2.5 Borel-algebraen frembragt af ubegrænsede intervaller	14

1.3 Mål og deres grundlæggende egenskaber

Definition 1.3.1 Måleligt rum (X, \mathcal{E})	15
Definition 1.3.2 Mål	16
<i>Eksempel 1.3.3</i> på mål, herunder Lebesgue-målet på \mathbb{R}^d , tælle-målet, Dirac-målet	16
<i>Eksempel 1.3.3(D)</i> Koncentrationen af et mål er igen et mål	16
Sætning 1.3.4 Lukkethedsegenskaber ved mål	17
Definition 1.3.7	20

1.4 Målelige afbildninger

Definition 1.4.1 Urbilledet	21
<i>Eksempel 1.4.2</i>	21
Definition 1.4.3 \mathcal{E} - \mathcal{F} -målelig funktion	22
<i>Eksempel 1.4.4</i>	22
Sætning 1.4.6 Urbilledet af målelig fkt er σ -algebra	22
Sætning 1.4.6(iv) Fkt. er målelig hvis Urbilledet af et frembringer-element er måleligt	22
Lemma 1.4.7	25
Sætning 1.4.8 Kontinuerte funktioner er målelige	25
Sætning 1.4.9 Flerdimensionel målelig \Leftrightarrow koordinater målelig	25

1.5 Målelige funktioner med værdier i \mathbb{R}

Definition 1.5.1 \mathcal{E} - \mathbb{R} -målelige funktioner	26
<i>Eksempel 1.5.3</i> Monotone funktioner er målelige	27
Sætning 1.5.4 Målelighed bevares under funktionsaritmetik	27
<i>Eksempel 1.5.5</i> vis at en mængde er en Borel-mængde	28

1.6 Målelighed ved grænseovergang

Definition 1.6.1 Borel-algebraen	29
Lemma 1.6.3	30
Definition 1.6.4	30
Sætning 1.6.6	31
Korollar 1.6.7	32
Sætning 1.6.8	33
<i>Eksempel 1.6.10</i>	34
Korollar 1.6.11	34

1.7 Målelighed i delrum

Definition 1.7.1	35
Sætning 1.7.3 Tuborg-resultatet generelt	36
Definition 1.7.4	37
Lemma 1.7.5	37
Sætning 1.7.6	38
Lemma 1.7.7	38
Korollar 1.7.8 Tuborg-resultatet for \mathbb{R}^d	38

1.8 Simple funktioner, side 39

2 Lebesgue-integralet

2.1 Integralet af positive simple funktioner, side 60

2.2 Integration af positive målelige funktioner

Definition 2.2.1	af $\int f d\mu$	63
Lemma 2.2.3	$\int f d\mu$ stemmer overens med I_μ	64
Sætning 2.2.4	Monoton konvergens	64
Korollar 2.2.5		66
Eksempel 2.2.6		66
Sætning 2.2.7		68
Sætning 2.2.9		68
Sætning 2.2.10	Fatous lemma	69
Sætning 2.2.11		70
Eksempel 2.2.13		71

2.3 Nulmængder og μ -næsten overalt, side 72

2.4 Integration af reelle funktioner

Definition 2.4.1	af $\mathcal{L}(\mu)$ og $\mathcal{L}^1(\mu)$	76
Definition 2.4.3		77
Sætning 2.4.5		78
Korollar 2.4.7	f i \mathcal{L} eller \mathcal{L}^1 ud fra majorent	80

2.5 Konvergenssætninger for integralet

Sætning 2.5.1		82
Sætning 2.5.2		83
Sætning 2.5.3	Domineret konvergens	84
Eksempel 2.5.5		85

2.6 Integration over delmængde

Definition 2.6.1		87
Sætning 2.6.5		89

2.7 Lebesgue-integralet vs. Riemann-integralet

Definition 2.7.1		90
Sætning 2.7.3	Omskriv til Riemann-integral	91
Eksempel 2.7.5		93

3 Entydighed af mål

3.1 Delta-systemer og Dynkins Lemma

Definition 3.1.1	Delta-system	103
Lemma 3.1.4	Ækvivalens mellem δ -system og σ -algebra	104
Sætning 3.1.5	Frembringere af δ -systemer	105

Sætning 3.1.7

Ækvivalens mellem δ -system og σ -algebra (Dynkins Lemma) 105

3.2 Entydighedsresultater for mål

Sætning 3.2.1	Entydighed for endelige mål	106
Hovedsætning 3.2.2	Entydighed for vilkårlige mål	107
Eksempel 3.2.3		108
Eksempel 3.2.4		109

4 Produktmål

4.1 Produktrummet af to målelige rum, side 113

4.2 Produktrum af flere end to målelige rum, side 117

4.3 Eksistens og entydighed af produktmål

Lemma 4.3.1		123
Lemma 4.3.2		124
Sætning 4.3.3		125
Definition 4.3.4	Produktmålet	126
Sætning 4.3.6		127
Korollar 4.3.8	Fra produktmål til grundmål: $\lambda_{d+m}(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_m(B_x) \lambda_d(dx)$	128
Sætning 4.3.9		128
Korollar 4.3.10		129

4.4 Integration med hensyn til produktmål - Tonellis og Fubinis Sætninger

Sætning 4.4.1	Tonelli: Fra dobbeltintegral til itereret integral (positive funktioner)	130
Eksempel 4.4.3		132
Sætning 4.4.4	Fubini: Generel Tonelli (generelle funktioner)	134