

INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
<b>Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)</b>
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12
Eksamensdag: Tirsdag den 20. juni 2017, kl. 9.00-11.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort \_\_\_\_\_

Navn \_\_\_\_\_

Skriftlig Eksamen  
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Institut for Datalogi  
Aarhus Universitet

Tirsdag den 20. juni 2017, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en mængde multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

Hvert delspørgsmål har præcist et rigtigt svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge **max ét svar** ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du  $-\frac{1}{k-1}$  point, hvor  $k$  er antal svarmuligheder.

For en opgave med vægt  $v\%$  og med  $n$  delspørgsmål, hvor du opnår samlet  $s$  point, beregnes din besvarelse af opgaven som:

$$\frac{s}{n} \cdot v \%$$

Bemærk at det er muligt at få negative point for en opgave.

**Opgave 1 (10 %)**

I det følgende angiver  $\log n$  2-tals-logaritmen af  $n$ .

	Ja	Nej
$n^6$ er $O(n^9)$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^{1/6}$ er $O(n^{1/9})$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$9n$ er $O(6n)$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$9n$ er $O(6 + n)$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n$ er $O(6^9)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$n^6 + n^9$ er $O(n^6)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$1/n$ er $O(2^{1/n})$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1/n$ er $O(1/n^2)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$6 \log n$ er $O(\log(9n))$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^2$ er $O(3^n)$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^3$ er $O(2^n)$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\log n)^3$ er $O(2 \log n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$3^{\log n}$ er $O(n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(\log n)(\log n)$ er $O(2 \log n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\sqrt{n}/\log n$ er $O(n^{1/3})$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$6^9$ er $O(9^6)$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^4$ er $O(n \cdot n + n \cdot n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(\log n)^2$ er $O(\sqrt{n})$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^2 \cdot n^3$ er $O(n^4)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$n^2 + n^3$ er $O(n^4)$ ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 2 (4 %)**

For en binær max-heap af størrelse  $n$ , angiv best-case og worst-case udførelsestid for nedenstående operationer.

	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$
INSERT, worst-case	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
INSERT, best-case	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
HEAP-EXTRACT-MAX, worst-case	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
HEAP-EXTRACT-MAX, best-case	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
BUILD-MAX-HEAP, worst-case	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
BUILD-MAX-HEAP, best-case	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 3 (10 %)**

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af  $n$  i  $O$ -notation.

**Algoritme Loop1( $n$ )**  
 $s = 0$   
**for**  $i = 1$  to  $n$   
     **for**  $j = 1$  to  $n$   
          $s = s + 1$

**Algoritme Loop2( $n$ )**  
 $s = 0$   
**for**  $i = 1$  to  $n$   
     **for**  $j = 1$  to  $n$   
         **if**  $i = j$  **then**  
             **for**  $k = 1$  to  $n$   
                  $s = s + 1$

**Algoritme Loop3( $n$ )**  
 $i = 1$   
 $j = 1$   
**while**  $i \leq n$   
     **while**  $j \leq i$   
          $j = j + 1$   
      $i = 2 * i$

**Algoritme Loop4( $n$ )**  
 $i = 1$   
 $j = 1$   
 $s = 1$   
**while**  $i \leq n$   
     **if**  $i = j$  **then**  
         **for**  $k = 1$  to  $n$   
              $s = s + 1$   
          $j = 2 * j$   
      $i = i + 1$

**Algoritme Loop5( $n$ )**  
 $i = 1$   
 $j = n$   
**while**  $i \leq j$   
      $i = i + 1$   
      $j = j - 1$

**Algoritme Loop6( $n$ )**  
 $i = 1$   
 $j = n$   
**while**  $i \leq j$   
      $i = 4 * i$   
      $j = 2 * j$

	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n\sqrt{n})$	$O(\sqrt{n})$	$O((\log n)^2)$	$O(n^3)$
Loop1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop5	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop6	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 4 (4 %)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	10	13	5	9	12	4	3	2	7

Angiv hvordan ovenstående binære max-heap ser ud efter HEAP-EXTRACT-MAX.

<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">8</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">13</td><td style="padding: 2px 5px;">10</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td><td style="padding: 2px 5px;">12</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	13	10	7	5	9	12	4	3	2	<input type="checkbox"/>
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
13	10	7	5	9	12	4	3	2											
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">8</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">13</td><td style="padding: 2px 5px;">10</td><td style="padding: 2px 5px;">12</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	13	10	12	5	9	4	3	2	7	<input type="checkbox"/>
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
13	10	12	5	9	4	3	2	7											
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">8</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">13</td><td style="padding: 2px 5px;">10</td><td style="padding: 2px 5px;">12</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	13	10	12	5	9	7	4	3	2	<input checked="" type="checkbox"/>
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
13	10	12	5	9	7	4	3	2											
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">8</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">13</td><td style="padding: 2px 5px;">12</td><td style="padding: 2px 5px;">10</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	13	12	10	9	7	5	4	3	2	<input type="checkbox"/>
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
13	12	10	9	7	5	4	3	2											

**Opgave 5 (4%)**

Angiv den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 3, 2, 4, 6, 5, 7, og 8 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

- |   |   |   |   |   |   |   |                          |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |                          |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | <input type="checkbox"/> |
- |   |   |   |   |   |   |   |                                     |
|---|---|---|---|---|---|---|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |                                     |
| 8 | 5 | 7 | 2 | 4 | 3 | 6 | <input checked="" type="checkbox"/> |
- |   |   |   |   |   |   |   |                          |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |                          |
| 3 | 2 | 4 | 6 | 5 | 7 | 8 | <input type="checkbox"/> |
- |   |   |   |   |   |   |   |                          |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |                          |
| 8 | 6 | 7 | 2 | 5 | 3 | 4 | <input type="checkbox"/> |

**Opgave 6 (4%)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	5	7	9	2	4	6	8

Angiv hvordan ovenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP.

- |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                     |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |                                     |
| 9 | 8 | 5 | 7 | 3 | 2 | 4 | 6 | 1 | <input checked="" type="checkbox"/> |
- |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                          |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |                          |
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | <input type="checkbox"/> |
- |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                          |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |                          |
| 5 | 9 | 4 | 8 | 3 | 2 | 1 | 6 | 7 | <input type="checkbox"/> |
- |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                          |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |                          |
| 9 | 8 | 5 | 1 | 6 | 2 | 4 | 3 | 7 | <input type="checkbox"/> |

**Opgave 7 (4%)**

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ( $d = 4, k = 5$ ).

4231    4321    1432    2431    3421

Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de to mindst betydende cifre.

- |      |      |      |      |      |                                     |
|------|------|------|------|------|-------------------------------------|
| 3421 | 4321 | 4231 | 2431 | 1432 | <input type="checkbox"/>            |
| 3421 | 4321 | 2431 | 4231 | 1432 | <input type="checkbox"/>            |
| 4321 | 3421 | 2431 | 4231 | 1432 | <input type="checkbox"/>            |
| 4321 | 3421 | 4231 | 2431 | 1432 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 1432 | 2431 | 3421 | 4231 | 4321 | <input type="checkbox"/>            |

**Opgave 8 (4%)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	19	7	26	10	8	23	6	12	17	30	42	37

Angiv resultatet af at anvende PARTITION(A,3,11) på ovenstående array.

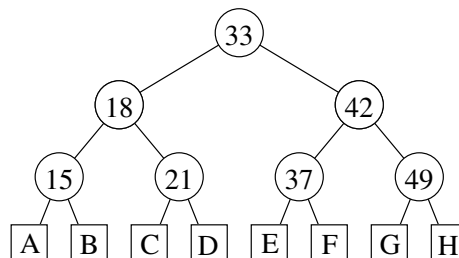
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	7	10	8	6	19	23	26	12	17	30	42	37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	7	10	8	6	12	17	19	23	26	30	42	37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	7	10	8	6	12	17	19	26	23	30	42	37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	6	7	8	10	12	17	19	23	26	30	37	42

**Opgave 9 (4%)**

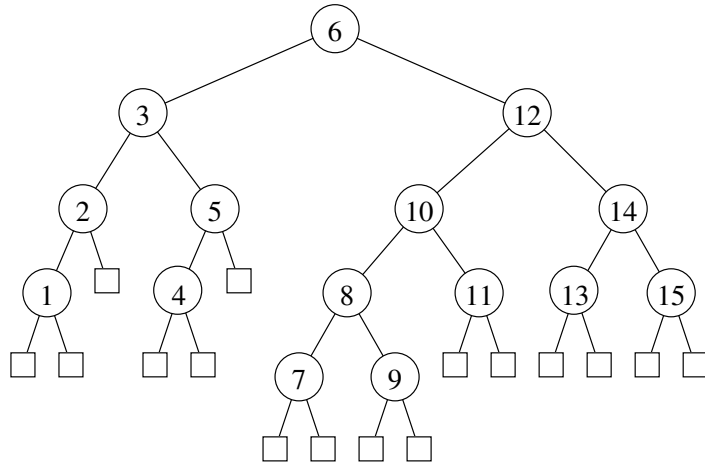


Angiv i hvilke blade A-H i ovenstående ubalancerede binære søgetræ elementerne 6, 22, 41, 19, og 34 skal indsættes (det antages at før hver indsættelse indeholder træet kun ovenstående syv elementer).

	A	B	C	D	E	F	G	H
Insert(6)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(22)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(41)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(19)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(34)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

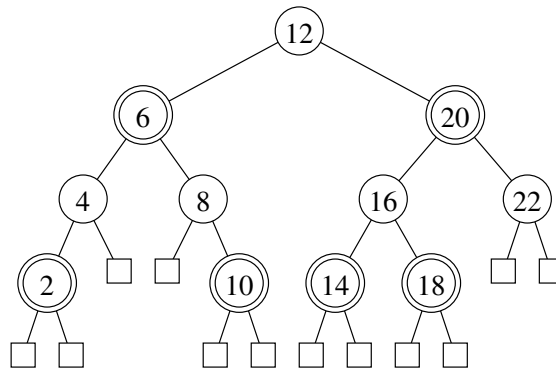
**Opgave 10 (4%)**

For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde

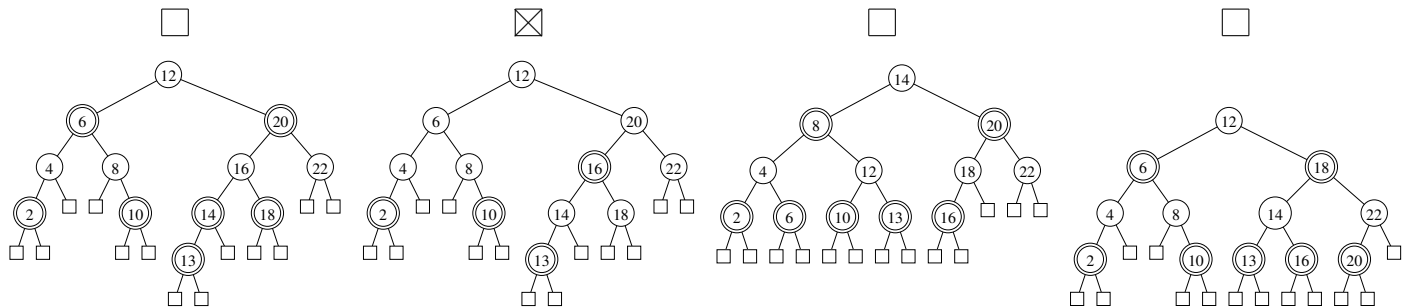


- |                        | Ja                                  | Nej                                 |
|------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1, 4, 8, 12            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| 2, 5, 7, 9, 12         | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 1, 4, 7, 9, 12         | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| 1, 4, 7, 9, 10, 14     | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| 1, 4, 7, 9, 10, 13, 15 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |

**Opgave 11 (4%)**



Angiv det resulterende rød-sort træ når man indsætter 13 i ovenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder).







**Opgave 14 (4%)**

I følgende hashtabel af størrelse 11 er anvendt *dobbelt hashing* med hashfunktionerne  $h_1(k) = k \bmod 11$  og  $h_2(k) = 1 + (3k \bmod 10)$ .

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			14	15		17	7			10

Angiv positionerne de tre elementer 3, 4 og 6 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 7, 10, 14, 15 og 17).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Insert(3)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(4)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(6)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 15 (4%)**

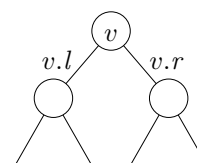
For  $n$  tal  $x_1, \dots, x_n$  ønsker vi at beregne koefficienterne  $a$  og  $b$  til polynomiet

$$P(y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y)^2 = n \cdot y^2 + a \cdot y + b.$$

F.eks. for  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ , og  $x_3 = 5$ , har vi polynomiet  $P(y) = (2 - y)^2 + (3 - y)^2 + (5 - y)^2 = 3y^2 - 20y + 38$ , dvs.  $a = -20$  og  $b = 38$ .

Betragt et søgetræ hvor hver knude  $v$  gemmer et tal  $v.x$ , og knuderne er ordnet venstre-mod-højre efter stigende  $v.x$ . Derudover gemmes i en knude  $v$  to værdier  $v.a$  og  $v.b$ , som er  $a$  og  $b$  koefficienterne for  $P(y)$  polynomiet defineret ved alle  $x$  værdierne i  $v$ 's undertræ.

Angiv hvorledes  $v.a$  og  $v.b$  kan beregnes når den tilsvarende information er kendt ved de to børn  $v.l$  og  $v.r$  (det kan antages at disse begge eksisterer).



$v.a = \left\{ \begin{array}{l} v.l.a + v.r.a + v.x \\ v.l.a + v.r.a - 2 * v.x \\ v.l.a * v.r.a * (v.x)^2 \\ v.l.a + v.r.a + (v.x)^2 \end{array} \right.$	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
$v.b = \left\{ \begin{array}{l} v.l.b + v.r.b + v.x \\ v.l.b + v.r.b + (v.x)^2 \\ v.l.b + v.r.b - 2 * v.x \\ v.l.b + v.r.b + 2 * v.x \end{array} \right.$	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

**Transitionssystem CHASE**  
 Konfigurationer:  $\{[x, y] \mid \text{heltal } x, y \geq 0\}$   
 $[x, y] \triangleright [x + 2, y + 1] \quad \text{if } x < y$

**Opgave 16 (4%)**

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem CHASE. Startkonfigurationen antages at være  $[x_0, y_0]$ , hvor  $x_0 \geq 0$  og  $y_0 \geq 0$ .

	Ja	Nej
$2(x - x_0) = y - y_0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$x - x_0 = 2(y - y_0)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x \leq y$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$ y - x  \leq  y_0 - x_0 $	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$ x  \leq  y $	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**Opgave 17 (4%)**

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem CHASE. Startkonfigurationen antages at være  $[x_0, y_0]$ , hvor  $x_0 \geq 0$  og  $y_0 \geq 0$ .

	Ja	Nej
$\mu(x, y) = x - x_0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, y) = x_0 - x$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, y) = y - x$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, y) =  y - x $	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, y) = 2y - x$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**Opgave 18 (4%)**

For QuickSort på input af størrelse  $n$ , og et givet element  $e$  i inputet, hvor mange sammenligninger vil dette element  $e$  indgå i under udførelsen af QuickSort? Forventet antal sammenligninger er her forventet antal sammenligninger for en tilfældig permutation af input.

	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$
Worst-case antal sammenligninger	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Best-case antal sammenligninger	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Forventet antal sammenligninger	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Givet et heltal  $n \geq 0$  heltal, så identificerer nedenstående algoritme antallet af 1-tal i den binære repræsentation af  $n$ , dvs. beregner

$$\text{bits}(n) = |\{i \mid 0 \leq 2^i \leq n \wedge n \bmod 2^{i+1} \geq 2^i\}|.$$

**Algoritme** BITS( $n$ )

Inputbetingelse : Heltal  $n \geq 0$

Outputkrav :  $r = \text{bits}(n)$

Metode :  $x \leftarrow n$ ;

$r \leftarrow 0$ ;

**{I}** while  $x > 0$  do

**if**  $x \bmod 2 = 1$  **then**

$r \leftarrow r + 1$

$x \leftarrow x - 1$

**else**

$x \leftarrow x/2$

### Opgave 19 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant  $I$  for ovenstående algoritme BITS.

	Ja	Nej
$x > 0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$0 \leq x \leq n$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = \text{bits}(x)$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$r = \text{bits}(n - x)$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$r = \text{bits}(n) - \text{bits}(x)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Opgave 20 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme BITS.

	Ja	Nej
$\mu(x, r, n) = x$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, r, n) = \text{bits}(x)$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, r, n) = r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, r, n) = x + r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, r, n) = 2x + r$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 21 (4%)**

Givet et array  $C[1..n]$  med  $n \geq 1$  heltal, og et heltal  $x$ , så beregner nedenstående algoritme

$$Poly(C, x) = \sum_{i=1}^n C[i] \cdot x^{i-1} = C[1] + C[2] \cdot x + C[3] \cdot x^2 + \dots + C[n] \cdot x^{n-1} .$$

**Algoritme** POLY( $C, x$ )

Inputbetingelse : Heltal  $x$  og array  $C$  med  $n \geq 1$  heltal

Outputkrav :  $r = Poly(C, x)$

Metode :  $i \leftarrow n$ ;  
 $r = C[n]$ ;  
{ $I$ } **while**  $i > 1$  **do**  
 $i \leftarrow i - 1$ ;  
 $r \leftarrow r * x + C[i]$

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant  $I$  for ovenstående algoritme POLY.

	Ja	Nej
$r = Poly(C[1..i], x)$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$r = Poly(C[i..n], x)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = Poly(C[1..n], x)$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$1 < i < n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$1 \leq i \leq n$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 22 (4%)**

Antag at et array  $X$  af størrelse  $n$  indeholder to stakke  $S$  og  $T$ , henholdsvis af størrelse  $s$  og  $t$ , således at  $X[1..s] = S$  og  $X[n+1-t..n] = T$ , hvor toppen af de to stakke er henholdsvis  $X[s]$  og  $X[n+1-t]$ . Når  $X$  bliver fuld, dvs.  $s+t = n$ , allokeres et dobbelt så stort array til  $X$ , og  $S$  og  $T$  kopieres over i dette array.

Med en passende potentialefunktion kan man argumentere for at stakoperationerne PUSH og POP på de to stakke tager amortiseret  $O(1)$  tid. Angiv for hver af nedenstående funktioner om dette er en sådan potentialefunktion  $\Phi$ .

	Ja	Nej
$s + t$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$t - s$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$s + n - t$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\max\{0, 2(s+t) - n\}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n - s - t$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>