

Opgave 1 (10 %)

I det følgende angiver $\log n$ 2-tals-logaritmen af n .

| | Ja | Nej |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $n + 3n$ er $O(2n)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| n^6 er $O(n^5)$? | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $n \log n$ er $O(n^2/\log n)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $4n^3$ er $O(3n^4)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $n^{\frac{1}{2}}$ er $O(n^{\frac{1}{4}})$? | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| \sqrt{n} er $O(n^{\frac{1}{2}})$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 27^n er $O(n^{27})$? | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 4^n er $O(2^{3n})$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $1/n$ er $O(\log n)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\log n$ er $O(\sqrt{n})$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| n er $O(\frac{1}{2}n)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| n^4 er $O((n^2)^2)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $n^{27} + 28$ er $O(n^{54})$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $n^{27} \cdot n^{13}$ er $O(n^{30})$? | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $n/\log n$ er $O(n)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $n + \sqrt{n}$ er $O(n\sqrt{n})$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $n\sqrt{n}$ er $O(n)$? | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $7n - 4n$ er $\Omega(9n)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $8^{\frac{1}{3}\log n}$ er $\Theta(n)$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\frac{n^3}{n^9}$ er $O(\frac{1}{n^2})$? | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Opgave 2 (4 %)

Lad v være en knude i et rød-sort søgetræ, og antag der er n elementer i v 's venstre undertræ. Hvor mange elementer kan der så maksimalt være i v 's højre undertræ, dvs. hvor ubalanceret kan en knude v være i et rød-sort søgetræ?

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| $\Theta(n)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n\sqrt{n})$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(2^n)$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Opgave 3 (10 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)
 for $i = 1$ to n
 $j = i$
 while $j > 1$
 $j = \lfloor j/2 \rfloor$

Algoritme Loop2(n)
 $s = 1$
 for $i = 1$ to n
 for $j = i$ to n
 $s = s + i$

Algoritme Loop3(n)
 $i = 1$
 $j = 0$
 while $i \leq n$
 $i = i + i$
 while $j < i$
 $j = j + 1$

Algoritme Loop4(n)
 $i = 1$
 $j = n$
 while $i \leq j$
 $i = i + i$
 $j = j - 1$

Algoritme Loop5(n)
 $i = 1$
 $s = 0$
 while $i \leq n$
 for $j = i$ to n
 $s = s + 1$
 $i = i + i$

Algoritme Loop6(n)
 $i = 1$
 $j = 1$
 while $i \leq n$
 $j = j + 1$
 $i = i + j$

| | $O(\log n)$ | $O(n)$ | $O(n \log n)$ | $O(n^2)$ | $O(n\sqrt{n})$ | $O(\sqrt{n})$ | $O(n^3)$ | $O((\log n)^2)$ |
|-------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Loop1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Loop2 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Loop3 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Loop4 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Loop5 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Loop6 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Opgave 4 (4 %)

| | | | | | | | | | | |
|----|----|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 11 | 7 | 9 | 8 | 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | 6 |

Angiv hvordan ovenstående binære max-heap ser ud efter HEAP-EXTRACT-MAX.

| | | | | | | | | | | |
|----|----|---|---|---|---|---|---|---|----|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | <input type="checkbox"/> |
| 11 | 9 | 7 | 8 | 6 | 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | <input type="checkbox"/> |
| 6 | 11 | 7 | 9 | 8 | 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | <input type="checkbox"/> |
| 11 | 9 | 7 | 3 | 8 | 4 | 2 | 6 | 1 | 5 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 11 | 9 | 7 | 6 | 8 | 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | |

Opgave 5 (4%)

Angiv den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 2, 3, 5, 7, 6, og 4 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

- | | | | | | | | | |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|-------------------------------------|
| 1 2 3 4 5 6 7 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 4 | 6 | <input type="checkbox"/> |
| 1 2 3 4 5 6 7 | 7 | 5 | 6 | 1 | 3 | 2 | 4 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 1 2 3 4 5 6 7 | 7 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | <input type="checkbox"/> |
| 1 2 3 4 5 6 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 6 (4%)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|----|---|---|---|---|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3 | 4 | 7 | 10 | 1 | 5 | 6 | 9 | 11 | 2 |

Angiv hvordan ovenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP.

- | | | | | | | | | | | | |
|----------------------|----|----|---|----|---|---|---|---|---|---|-------------------------------------|
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 | 11 | 10 | 7 | 9 | 4 | 5 | 6 | 3 | 1 | 2 | <input type="checkbox"/> |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 | 7 | 10 | 6 | 11 | 2 | 5 | 3 | 9 | 4 | 1 | <input type="checkbox"/> |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 | 11 | 10 | 7 | 9 | 2 | 5 | 6 | 3 | 4 | 1 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 | 11 | 10 | 7 | 9 | 1 | 5 | 6 | 3 | 4 | 2 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 7 (4%)

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 5, k = 6$).

53661 45325 32661 10601 31325

Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de *tre* mindst betydende cifre.

- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------|
| 10601 | 31325 | 32661 | 45325 | 53661 | <input type="checkbox"/> |
| 45325 | 31325 | 10601 | 53661 | 32661 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 10601 | 45325 | 31325 | 53661 | 32661 | <input type="checkbox"/> |
| 31325 | 45325 | 10601 | 53661 | 32661 | <input type="checkbox"/> |
| 45325 | 31325 | 10601 | 32661 | 53661 | <input type="checkbox"/> |

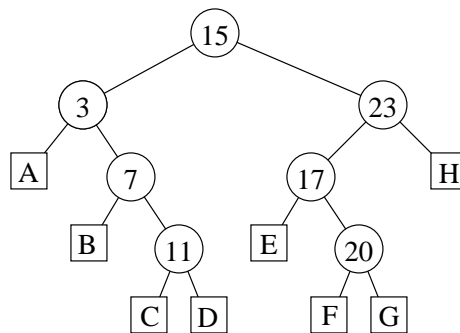
Opgave 8 (4%)

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 14 | 7 | 23 | 10 | 4 | 6 | 21 | 11 | 15 | 5 | 13 | 8 | 9 | 17 |

Angiv resultatet af at anvende PARTITION(A,2,13) på ovenstående array.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|----|---|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | <input type="checkbox"/> |
| 14 | 7 | 10 | 4 | 6 | 11 | 5 | 13 | 8 | 9 | 23 | 15 | 21 | 17 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 14 | 7 | 4 | 6 | 5 | 8 | 9 | 11 | 15 | 23 | 13 | 10 | 21 | 17 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | <input type="checkbox"/> |
| 14 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 13 | 15 | 21 | 23 | 17 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | <input type="checkbox"/> |
| 14 | 7 | 4 | 6 | 5 | 8 | 9 | 23 | 10 | 21 | 11 | 15 | 13 | 17 | |

Opgave 9 (4%)



Angiv i hvilke blade A-H i ovenstående ubalancerede binære søgetræ elementerne 9, 21, 16, 12 og 19 skal indsættes.

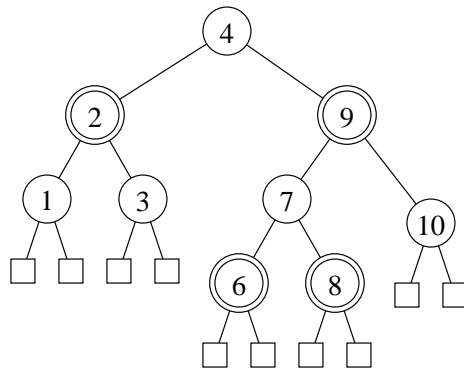
| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| Insert(9) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Insert(21) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Insert(16) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Insert(12) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Insert(19) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Opgave 10 (4%)

For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde.

| | Ja | Nej |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1, 3, 5, 7, 12, 17 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 1, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 17 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 2, 6, 8, 12, 17 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1, 3, 5, 7, 8, 12, 17 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1, 3, 5, 7, 8, 11, 16 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Opgave 11 (4%)



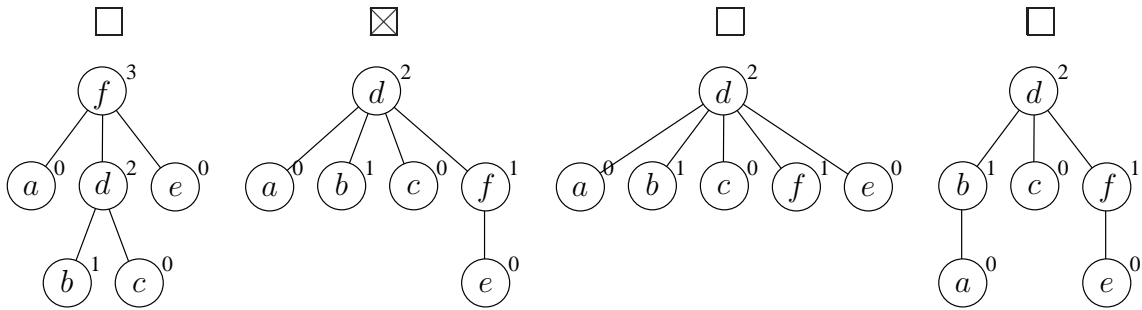
Angiv det resulterende rød-sortede træ når man indsætter 5 i ovenstående rød-sortede træ (dobbelteirkler angiver røde knuder).

| | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | | |

Opgave 12 (4%)

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering.

- makeset(a)
- makeset(b)
- makeset(c)
- makeset(d)
- makeset(e)
- makeset(f)
- union(a, b)
- union(c, d)
- union(e, f)
- union(b, c)
- union(b, e)
- find(a)



Opgave 13 (4%)

I følgende hashtabel er anvendt *linear probing* med hashfunktionen $h(k) = 3k \text{ mod } 11$.

| | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | | | | | | 2 | | | 14 | 7 |

Angiv positionerne de tre elementer 3, 5 og 13 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 2, 7, 11 og 14).

| | | | | | | | | | | | |
|------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Insert(3) | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Insert(5) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Insert(13) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Opgave 14 (4%)

I følgende hashtabel af størrelse 7 er anvendt *dobbelt hashing* med hashfunktionerne $h_1(k) = k \bmod 11$ og $h_2(k) = 1 + (k \bmod 6)$.

| | | | | | | |
|---|---|----|----|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | | 20 | 14 | | | 6 |

Angiv positionerne de tre elementer 2, 10 og 11 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 6, 7, 14 og 20).

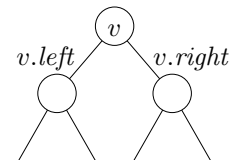
| | | | | | | | |
|------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Insert(2) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Insert(10) | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Insert(11) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Opgave 15 (4%)

Givet en streng T indeholdende bogstaver og start- og slut-parenteser (og), antages at alle positionerne med parenteser er gemt i et søgetræ, sorteret fra venstre-mod-højre efter stigende position. En knude v gemmer en position $v.p$ og den tilhørende parentes $v.c = T[v.p]$ fra T . For $T = \text{"a)b(cd(x)dc(a"}$ gemmes i træet $\langle v.p, v.c \rangle$ parrene $\langle 2, \rangle$, $\langle 4, (\rangle$, $\langle 7, (\rangle$, $\langle 9, \rangle$ og $\langle 12, (\rangle$.

Vi ønsker at vedligeholde information om parenteserne er balancerede. I ovenstående eksempel er parenteserne ") (() (" ikke balancerede, da kun de markerede parenteser går ud mod hinanden. De restende parenteser ") ((" vil altid være R)-parenteser efterfulgt af L (-parenteser, hvor $R \geq 0$ og $L \geq 0$. I eksemplet har vi $R = 1$ og $L = 2$. I en knude v i træet gemmes disse værdier $v.R$ og $v.L$ for delsekvensen af parenteserne i v 's undertræ.

Angiv hvorledes $v.R$ kan beregnes når $v.c =)$ og R og L værdierne er kendt ved de to børn $v.left$ og $v.right$ (det kan antages at disse begge eksisterer).



$$v.R = \begin{cases} v.left.R + 1 + v.right.R & \square \\ v.left.R + v.right.R + 1 - v.left.L & \square \\ v.left.R + \max\{0, v.right.R + 1 - v.left.L\} & \otimes \\ v.left.R + 1 + \max\{0, v.right.R - v.left.L\} & \square \end{cases}$$

Transitionssystem ZigZag
Konfigurationer: $\{[i, j] \mid \text{heltal } i \geq 0 \text{ og } j \geq 0\}$
 $[i, j] \triangleright [i - 1, j + i] \quad \mathbf{if} \quad i > 0$
 $[i, j] \triangleright [i, j - 1] \quad \mathbf{if} \quad j > 0$

Opgave 16 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem ZigZag. Startkonfigurationen antages at være $[n, n]$, hvor $n \geq 0$.

| | Ja | Nej |
|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $i \leq n$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $j \leq n$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $i^2 + j^2 \leq 2n^2$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $i^2 + j \leq n^2 + n$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $i(i - 1) + j \leq n^2$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Opgave 17 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem ZigZag.

| | Ja | Nej |
|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\mu(i, j) = i + j$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\mu(i, j) = i \cdot j$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\mu(i, j) = i^2 + j$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\mu(i, j) = 2i^2 + j$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\mu(i, j) = i^2 + j^2$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Opgave 18 (4%)

Antag, at et givet array $A[1..n]$ repræsenterer en binær max-heap indeholdende n elementer. Hvor hurtigt kan man konstruere et søgetræ (ikke nødvendigvis balanceret) indeholdende elementerne $A[1..n]$, givet at A er en binær max-heap?

| | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| $\Theta(\log n)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n^2)$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Antag $A[1..n]$ er et sorteret array med n forskellige positive heltal. Lad $\text{squares}(A)$ angive antal $A[i]$ hvor $A[i]^2$ også forekommer i A . F.eks. er $\text{squares}(1, 3, 4, 7, 9, 16) = 3$, da $1^2 = 1$, $3^2 = 9$ og $4^2 = 16$. Nedenstående algoritme Squares beregner $\text{squares}(A)$.

Algoritme Squares($A[1..n]$)

Inputbetingelse : $A[1..n]$ array med n heltal $0 < A[1] < A[2] < \dots < A[n]$

Outputkrav : $r = \text{squares}(A)$

Metode : $i \leftarrow 1$;

$j \leftarrow 1$;

$r \leftarrow 0$;

{ I } **while** $j \leq n$ **do**

if $A[i]^2 < A[j]$ **then** $i \leftarrow i + 1$

if $A[i]^2 = A[j]$ **then** $i \leftarrow i + 1$; $j \leftarrow j + 1$; $r \leftarrow r + 1$

if $A[i]^2 > A[j]$ **then** $j \leftarrow j + 1$

Opgave 19 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Squares. Det antages at $A[0] = 0$ og $A[n + 1] = +\infty$.

| | Ja | Nej |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $1 \leq i \leq j \leq n$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $i \leq j$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $A[i - 1]^2 < A[j] \wedge r = \text{squares}(A[1..j])$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $A[i - 1]^2 < A[j] \wedge r = \text{squares}(A[1..j - 1])$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $r = j - 1$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Opgave 20 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Squares.

| | Ja | Nej |
|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\mu(n, i, j, r) = i$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\mu(n, i, j, r) = i + j$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\mu(n, i, j, r) = j - i$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\mu(n, i, j, r) = 2(n + 1) - i - j$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\mu(n, i, j, r) = 2n - i - j$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Opgave 21 (4%)

Antag at et array $A[1..n]$ indeholder $n \geq 1$ heltal. Positionen i i A siges at være *dominerende* hvis $A[i] > A[j]$ for alle $1 \leq j < i$. Lad $\text{dom}(A)$ angive antal dominerende positioner i i A , hvor $1 \leq i \leq n$. Nedenstående algoritme til venstre beregner $\text{dom}(A)$. For hvert af udsagnene til højre, angiv om de er en invariant I for algoritmen.

Algoritme Domination(A)

Inputbetingelse : Array $A[1..n]$ med $n \geq 1$ heltal

Outputkrav : $r = \text{dom}(A)$

Metode : $i \leftarrow 1$;
 $x \leftarrow A[1]$;
 $r \leftarrow 1$;
 { I } **while** $i < n$ **do**
 $i \leftarrow i + 1$;
 if $A[i] > x$ **then**
 $x \leftarrow A[i]$;
 $r \leftarrow r + 1$

| | Ja | Nej |
|---------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $1 \leq i < n$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $x = A[i]$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $x \geq A[i]$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $r = \text{dom}(A[1..n])$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $r = \text{dom}(A[1..i])$ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Opgave 22 (4%)

Betragt en tæller med n cifre x_0, \dots, x_{n-1} , hvor hvert ciffer er et tal fra $\{-1, 0, 1\}$, og hvor værdien af tælleren er $\sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i$. En tæller kan tælles én op og én ned med operationerne INC og DEC:

INC()

$i \leftarrow 0$
while $i < n$ **and** $x_i = 1$ **do**
 $x_i \leftarrow 0$
 $i \leftarrow i + 1$
if $i < n$ **then**
 $x_i \leftarrow x_i + 1$

DEC()

$i \leftarrow 0$
while $i < n$ **and** $x_i = -1$ **do**
 $x_i \leftarrow 0$
 $i \leftarrow i + 1$
if $i < n$ **then**
 $x_i \leftarrow x_i - 1$

Med en passende potentialefunktion kan man argumentere for at INC og DEC begge tager amortiseret $O(1)$ tid. Angiv for hver af nedenstående om dette er en sådan potentialefunktion Φ .

| | Ja | Nej |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $ \{i \mid 0 \leq i < n \wedge x_i = 1\} $ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $ \{i \mid 0 \leq i < n \wedge x_i \neq 0\} $ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $ \{i \mid 0 \leq i < n \wedge x_i = 1\} - \{i \mid 0 \leq i < n \wedge x_i = -1\} $ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\sum_{i=0}^{n-1} x_i$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $\sum_{i=0}^{n-1} x_i $ | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |