

DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 13 (tretten)
Eksamensdag: Tirsdag den 8. april 2008, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale: Åbogade 34, Benjamin bygningen, indgang B
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort _____

Navn _____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Tirsdag den 8. april 2008, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s}{n} \right\} \cdot v \%$$

Opgave 1 (4%)

	Ja	Nej
n er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
n^3 er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$7n^2$ er $O(3n + 10\sqrt{n})$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$23n^2 + n^4$ er $O(17n^3)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5n \log n$ er $\Omega(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (4%)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O -notationen:

$23n \log n$
 $\frac{1}{2}n^2$
 $4\sqrt{n}$
 $(\log n)^3$
 $2^{\frac{3}{2} \log n}$

Svar: _____

Opgave 3 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $j \leftarrow 1$   
  while  $j \leq n$  do  
     $k \leftarrow j$   
    while  $k \leq n$  do  
       $k \leftarrow k + 1$   
     $j \leftarrow j + 1$   
 $i \leftarrow i + 1$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $j \leftarrow 1$   
  while  $j \leq n$  do  
     $k \leftarrow j$   
    while  $k \leq n$  do  
       $k \leftarrow k * 2$   
     $j \leftarrow j * 2$   
 $i \leftarrow i * 2$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $j \leftarrow i$   
  while  $j \leq n$  do  
     $j \leftarrow j + 1$   
 $i \leftarrow i * 2$ 
```

Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

Opgave 4 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $x \leftarrow 1$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
  for  $j \leftarrow i$  to  $n$  do  
    for  $k \leftarrow i$  to  $j$  do  
       $x \leftarrow x + 1$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
 $j \leftarrow 2$   
while  $i \leq n$  do  
   $j \leftarrow j * j$   
   $k \leftarrow 1$   
  while  $k \leq j$  do  
     $k \leftarrow k + 1$   
   $i \leftarrow i + 1$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
 $j \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $j \leftarrow 2 * j$   
   $k \leftarrow 1$   
  while  $k \leq j$  do  
     $k \leftarrow 2 * k$   
   $i \leftarrow i + 1$ 
```

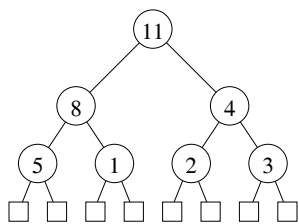
Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

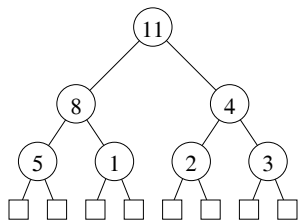
Opgave 5 (4%)

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 9.



Svar: _____

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en heap-extract-max operation.



Svar: _____

Opgave 6 (4%)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: _____

Opgave 7 (4%)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af build-max-heap for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3	5	7	9	11	13	15	16	14	12	10	8	6	4	2

Svar: _____

Opgave 8 (4%)

Angiv alle mulige binære max-heaps for mængden $\{1, 2, 3, 5, 7\}$.

Svar: _____

Opgave 9 (4%)

Betragt radix-sort anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 4, k = 10$). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de to mindst betydende cifre.

9827 2719 1524 4327 5627 1319 1324

Svar: _____

Opgave 10 (4%)

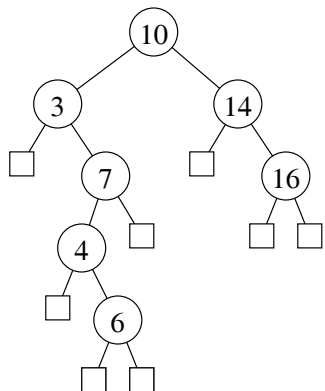
Angiv resultatet af at anvende PARTITION($A,5,11$) på nedenstående array.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	8	16	1	6	2	4	13	17	15	3	5	18	9	11	24	12	14	10	7	22

Svar: _____

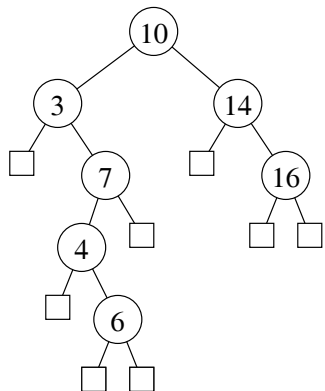
Opgave 11 (4%)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 8.



Svar: _____

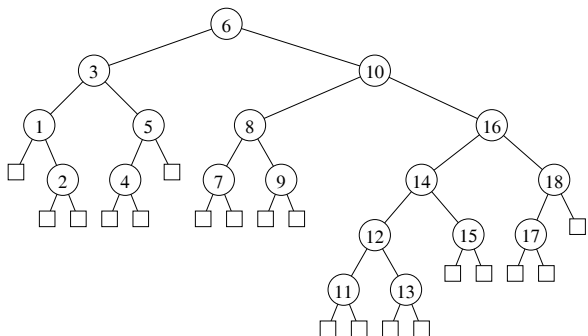
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 10.



Svar: _____

Opgave 12 (4%)

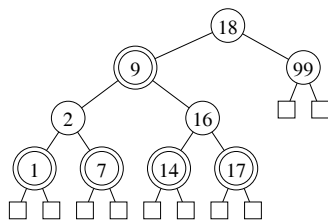
Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.



Svar: _____

Opgave 13 (4%)

Tegn hvordan nedenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 8.



Svar: _____

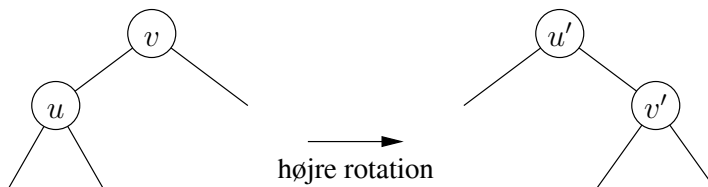
Opgave 14 (4%)

Følgende spørgsmål vedrører rød-sort træer.

	Ja	Nej
Antal interne røde knuder = antal interne sorte knuder	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antal eksterne blade = 1 + antal interne knuder	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antal interne sorte knuder \geq antal interne røde knuder	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Alle rod-til-blad stier indeholder det samme antal sorte knuder	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En rød knude har altid en sort far	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 15 (4%)

Betragt et søgetræ hvor hver knude v gemmer et element $v.e$ og elementets prioritet $v.p$. Elementerne i søgetræet er ordnet efter $v.e$. Derudover gemmer hver knude summen $v.s$ af prioriteterne i undertræet rodet ved v , og den maximale prioritet $v.m$ af et element i undertræet rodet ved v . Angiv nedenfor hvorledes disse værdier kan vedligeholdes under en højre rotation om knuden v . Det venstre og højre barn til en knude v betegnes $v.left$ og $v.right$, og fx. betegner $v.right.m$ den maximale prioritet af et element i undertræet rodet i det højre barn til v .



Svar $u'.e = u.e$

Svar $v'.e = v.e$

Svar $u'.p = u.p$

Svar $v'.p = v.p$

Svar $u'.m =$ _____

Svar $v'.m =$ _____

Svar $u'.s =$ _____

Svar $v'.s =$ _____

Opgave 16 (4%)

Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hash-funktionen er $h(k) = 2k \bmod 6$ og der indsættes elementerne 4, 3, 1, 6, 7, 8, og 9 i den givne rækkefølge.

Svar: _____

Opgave 17 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *linear probing* ser ud efter at elementerne 3, 5, 10, 0, 4, 7, og 17 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k) = 2k \bmod 7$.

0	1	2	3	4	5	6

Svar: _____

Opgave 18 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *quadratic probing* ser ud efter at elementerne 2, 17, 5, 1, og 11 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k, i) = 2k + i + 2i^2 \bmod 15$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Svar: _____

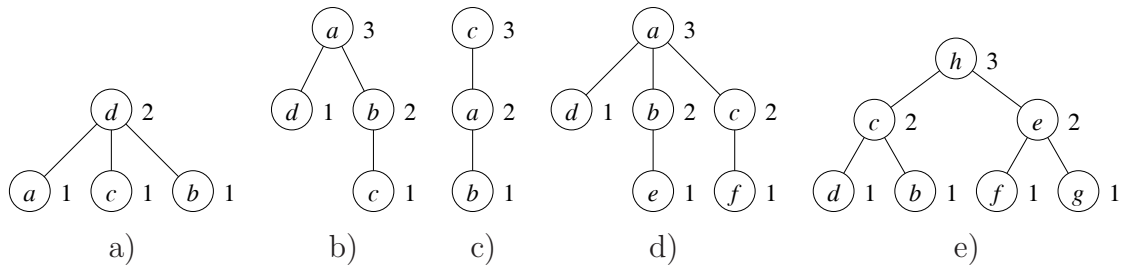
Opgave 19 (4%)

Betragt en stak implementeret i et array hvor overløb håndteres ved at allokere et nyt større array og kopiere indholdet af det gamle array til det nye array. Angiv den amortiserede tid for en push operation, når det nye array har nedenstående størrelse (n er antal elementer på stakken før push operationen):

- a) $n + 1$ Svar: _____
- b) $n + \lceil \sqrt{n} \rceil$ Svar: _____
- c) $\lceil \frac{3}{2}n \rceil$ Svar: _____
- d) $3n$ Svar: _____

Opgave 20 (4%)

Hvilke af nedenstående træer er mulige union-find strukturer og kan være opstået som en sekvens af union operationer, når der kun anvendes union-by-rank. Tallet til højre for en knude er knudens rank.



	Ja	Nej
a)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Transitionssystem UpDown
Konfigurationer: $\{[i, j] \mid \text{heltal } i, j \wedge j \geq 0\}$
 $[i, j] \triangleright [-i, j + 1] \quad \mathbf{if} \quad i < 0$
 $[i, j] \triangleright [-(i - 2), j + 1] \quad \mathbf{if} \quad i > 1$

Opgave 21 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem UpDown. Startkonfigurationen antages at være $[n, n]$ hvor $n \geq 1$.

	Ja	Nej
$i \leq j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i + j \leq 2n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j \leq 2n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i - j = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$4n - 2j - 1 = 2i - 1 $	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 22 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem UpDown.

	Ja	Nej
$\mu(i, j) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = 2n - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = i \cdot (2n - j)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j) = 2i - 1 $	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Algoritme $\text{Loglog}(n)$
Inputbetingelse : heltal $n \geq 2$
Outputkrav : $r = \lceil \log_2 \log_2 n \rceil$
Metode : $r \leftarrow 0;$
 $p \leftarrow 2;$
 $\{I\}$ **while** $p < n$ **do**
 $r \leftarrow r + 1;$
 $p \leftarrow p * p$

Opgave 23 (4%)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Loglog .

	Ja	Nej
$r \leq p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p = 2^r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p = 2^{2^r}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 24 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Loglog .

	Ja	Nej
$\mu(r, p, n) = p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(r, p, n) = n - p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(r, p, n) = n - r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(r, p, n) = n^2 - p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(r, p, n) = \lceil \log_2 \log_2 n \rceil - \log_2 \log_2 r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 25 (4%)

Givet et array $A = A[1]A[2] \cdots A[n]$, beregner nedenstående algoritme længden af det længste delarray hvor alle elementer er ens. Denne længde betegnes

$$\text{maxEqual}(A) = \max\{j - i + 1 \mid 1 \leq i \leq j \leq n \wedge A[i] = A[i + 1] = \cdots = A[j]\} .$$

For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_i , I_ℓ , og I_r være invarianter omkring variablerne i , ℓ , og r . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke). Det antages at A og n ikke kan ændres af algoritmen.

```
Algoritme LongestEqual( $A$ )  
Inputbetingelse : array  $A$  med  $n$  heltal  
Outputkrav      :  $r = \text{maxEqual}(A)$   
Metode          :  $r \leftarrow 1$ ;  
                  $i \leftarrow 2$ ;  
                  $\ell \leftarrow 1$ ;  
                  $\{I_i \wedge I_\ell \wedge I_r\}$  while  $i \leq n$  do  
                   if  $A[i] = A[i - 1]$  then  
                      $\ell \leftarrow \ell + 1$ ;  
                   else  
                      $\ell \leftarrow 1$ ;  
                   if  $\ell > r$  then  
                      $r \leftarrow \ell$ ;  
                    $i \leftarrow i + 1$ ;
```

Svar I_i : _____

Svar I_r : _____

Svar I_ℓ : _____

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ : _____