Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer (dADS)

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Mandag den 27. maj 2002, kl. 9.00–13.00

Opgave 1 (25%)

Denne opgave handler om multiplikation af positive heltal. Udover et tals værdi, a, skal vi betragte dets *binære* representation A, som er et array hvori værdierne er enten 0 eller 1. De mindst-betydende cifre står til venstre. Eksempelvis har tallet $a = 57$ den binære representation

$$A : [1, 0, 0, 1, 1, 1].$$

Hvis den binære repræsentation af et tal indeholder n cifre, betegner vi den som sædvanligt med $A[0..n]$, ligesom $A[0..k]$ betegner den del af tallet der består af de k mindst-betydende cifre. I eksemplet ovenfor er $A[0..6]$ lig med 57, medens $A[0..4]$ er lig med 9.

Endelig bruger vi den sædvanlige notation $+$ og $*$ for addition og multiplikation af heltal.

Spørgsmål a: Bevis at der for vilkårlige positive heltal a, b og for $k > 0$ gælder

$$a * B[0..(k + 1)] = a * B[0..k] + a * B[k] * 2^k,$$

hvor B angiver den binære representation af b. $\square$

Betragt nu følgende algoritme.

Algoritme: Heltalsmultiplikation

Input : a, b, positive heltal, med b givet ved sin binære repræsentation B.

Output : $S = a * b$

Metode : $S \leftarrow 0$; $k \leftarrow 0$;
$\{I\}$ **while** $k < |B|$ **do**
  $S \leftarrow S + a * B[k]$;
  $a \leftarrow 2 * a$;
  $k \leftarrow k + 1$

Spørgsmål b: Angiv en passende gyldig invariant I, og angiv hvilke bevisbyrder, der skal eftervises i et gyldighedsbevis. $\square$

Spørgsmål c: Eftervis bevisbyrderne fra spørgsmål **b**, og argumenter for at algoritmen er korrekt. $\square$

Opgave 2 (25%)

En internet-søgemaskine opbevarer en stor delmængde af de tilgængelige web-sider på internettet. Siderne kan opfattes som en *orienteret graf*, hvor grafens knuder svarer til web-siderne og hvor der findes en kant fra en knude u til en knude v hvis og kun hvis der på siden svarende til u er et link til siden svarende til v. Hvis en forespørgsel til en søgemaskine resulterer i flere mulige svar i form af en liste af relevante web-sider, så ønskes disse sorteret efter aftagende *relevans*.

I denne opgave betragtes tre mulige mål for relevansen af en side, alle baseret på den intution at en side er relevant, hvis mange andre sider refererer til den. Nedenstående tre spørgsmål beskæftiger sig hvert med eet af disse mål. Et eksempel med alle tre mål findes sidst i opgaven.

Vi antager i det følgende at grafen er givet ved *adjacency list* repræsentationen og at der som sædvanligt er henholdsvis n knuder og m kanter i grafen. Længden af en sti i grafen er som sædvanligt antallet af kanter der indgår i stien. Afstanden fra en knude u til en knude v er længden af den korteste sti fra u til v, og betegnes $d(u,v)$. Hvis der ingen sti findes fra u til v, er $d(u,v) = \infty$.

Spørgsmål a: Beskriv en algoritme, der beregner indgraden af hver knude i grafen. Hvad er udførselstiden for algoritmen som funktion af n og m? □

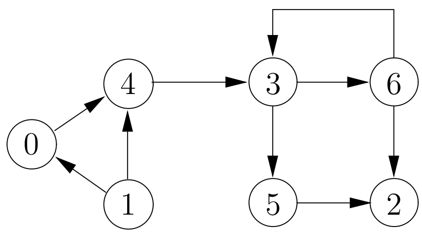
Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der for hver knude v beregner for hvor mange knuder u ($u \neq v$) der findes en sti fra u til v. Hvad er udførselstiden for algoritmen? □

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der for hver knude v beregner summen

$$\sum_{u \in N(v)} \left(\frac{1}{2}\right)^{d(u,v)},$$

hvor $N(v)$ er de knuder u som opfylder $u \neq v \ \wedge \ d(u,v) \neq \infty$. D.v.s. en knude med afstand k til v bidrager med $(\frac{1}{2})^k$ til summen for v. Hvad er udførselstiden af algoritmen? □

Eksempel: Tabellen nedenfor angiver de beregnede værdier i spørgsmål **a** til **c** for nedenstående graf. Indgangen med 5/4 fremkommer ved at $d(0,5) = d(1,5) = 3$, $d(4,5) = d(6,5) = 2$, og $d(3,5) = 1$. Summen for 5 er derfor $2 \cdot (1/2)^3 + 2 \cdot (1/2)^2 + (1/2)^1 = 5/4$.



v	0	1	2	3	4	5	6
a	1	0	2	2	2	1	1
b	1	0	6	4	2	5	4
c	1/2	0	3/2	3/2	1	5/4	1

Opgave 3 (25%)

Betragt en mængde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ af n forskellige tal ($n \geq 2$). Opstillet i numerisk orden

$$x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_n}$$

kalder vi $(x_{i_j}, x_{i_{j+1}})$ et *nabo-par* med *afstand* $d_j = x_{i_{j+1}} - x_{i_j}$, og kalder

$$d = \min\{\, d_j \mid 1 \leq j \leq n-1 \}$$

for mængdens *min-afstand*.

Spørgsmål a: Angiv min-afstand for nedenstående mængde.

$$\{4, 26, 1, 10, 23, 17\}$$

□

Spørgsmål b: Beskriv hvordan man givet en mængde af n forskellige tal kan finde min-afstand i tid $O(n \log n)$. □

Vi ønsker nu at vedligeholde en mængde S under følgende operationer.

INSERT(x)	:	Indsæt tallet x i mængden.
DELETE(x)	:	Slet tallet x fra mængden.
MIN-AFSTAND()	:	Returner min-afstanden for den aktuelle mængde.

Spørgsmål c: Beskriv hvorledes et balanceret søgetræ kan udvides så INSERT og DELETE tager tid $O(\log n)$ og MIN-AFSTAND tager tid $O(1)$, hvor n betegner antal tal i mængden før operationen udføres. □

Vi ønsker nu at tilføje en operation INTERVAL-MIN-AFSTAND(y_1, y_2), der returner min-afstand for mængden $[y_1, y_2] \cap S$.

> *Eksempel:* INTERVAL-MIN-AFSTAND$(2, 23)$ på overstående mængde returnerer 6, hvilket er afstanden for både nabo-parret $(4, 10)$ og nabo-parret $(17, 23)$.

Spørgsmål d: Beskriv hvordan man til operationerne fra spørgsmål **c** kan tilføje operationen INTERVAL-MIN-AFSTAND, således at MIN-AFSTAND udføres i tid $O(1)$ og de tre andre operationer i tid $O(\log n)$. □

Opgave 4 (25%)

I denne opgave betragtes en mængde positive heltal $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hvis sum er lig S. Vi ønsker at udvikle en algoritme, der kan finde en delmængde af tallene, hvis sum kommer tættest muligt på $S/2$.

Betragt følgende udsagn:

$U(s,k)$: Der findes en delmængde af $x_1, x_2, \ldots, x_k$, hvis sum er lig med s.

Spørgsmål a: Lad $\{x_1, x_2\} = \{1, 3\}$. Udfyld følgende tabel med sandhedsværdierne for $U(s,k)$ for $0 \leq s \leq 4$ og $0 \leq k \leq 2$.

s \ k	0	1	2
0			
1			
2			
3			
4			

□

Det påstås at $U(s,k)$ opfylder følgende rekursionsformel.

$$U(s,k) = \begin{cases} \textbf{True} & \text{hvis} \quad s = 0 \\ \textbf{False} & \text{hvis} \quad (s > 0) \wedge (k = 0) \\ U(s, k-1) & \text{hvis} \quad x_k > s \\ U(s, k-1) \ \vee \ U(s - x_k, k-1) & \text{hvis} \quad x_k \leq s \end{cases}$$

Spørgsmål b: Argumenter for denne påstand. □

Spørgsmål c: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet $x_1, x_2, \ldots, x_n$, S og K beregner alle værdier $U(s,k)$ for $0 \leq s \leq S$ og $0 \leq k \leq K$. Argumenter for algoritmens udførelsestid. □

Spørgsmål d: Hvordan kan man udvide algoritmen ovenfor til at finde en delmængde af tallene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hvis sum er tættest muligt på $S/2$? □